El libro electrónico del Proyecto Gutenberg de La Cuarta Dimensión, por C. Howard Hinton

Este libro electrónico es para uso de cualquier persona en cualquier lugar de los Estados Unidos y en la mayor parte del resto del mundo, sin costo alguno y casi sin restricciones de ningún tipo. Puede copiarlo, regalarlo o reutilizarlo según los términos de la Licencia del Proyecto Gutenberg incluida con este libro electrónico o en línea en www.gutenberg.org . Si no se encuentra en los Estados Unidos, deberá verificar las leyes del país donde se encuentra antes de utilizar este libro electrónico.

Título: La cuarta dimensión

Autor: C. Howard Hinton

Fecha de lanzamiento: 12 de enero de 2022 [libro electrónico n.º 67153]

Idioma: inglés

Producido por: Chris Curnow, Les Galloway y el equipo de revisión distribuido en línea en https://www.pgdp.net (este archivo fue producido a partir de imágenes que The Internet Archive puso generosamente a disposición)

*** INICIO DEL PROYECTO GUTENBERG EBOOK LA CUARTA DIMENSIÓN ***

Notas del transcriptor

Los errores tipográficos evidentes se han corregido silenciosamente. El resto de la ortografía y la puntuación permanecen sin cambios.

La portada fue preparada por el transcriptor y se coloca en el dominio público.

LA CUARTA DIMENSIÓN

ALGUNAS OPINIONES DE LA PRENSA

“ *El Sr. CH Hinton analiza el tema de la dimensionalidad superior del espacio, siendo su objetivo evitar sutilezas y tecnicismos matemáticos, y así permitir que su argumento sea seguido por lectores que no están lo suficientemente versados en matemáticas para seguir estos procesos de razonamiento.* ”— Notts Guardian.

“ *La cuarta dimensión es un tema que ha ejercido una gran fascinación entre muchos profesores, y aunque no se puede pretender haber comprendido del todo las concepciones y argumentos del Sr. Hinton, hay que admitir que revela la elusiva idea bajo una luz bastante fascinante. Aparte de la tesis principal del libro, muchos capítulos son de gran interés independiente. En definitiva, un libro interesante, inteligente e ingenioso.* ”—Correo de Dundee.

“ *El libro recompensará con creces el estudio de los hombres a quienes les gusta ejercitar su ingenio sobre los problemas del pensamiento abstracto.* ” —Escocés.

“ *El profesor Hinton ha hecho bien en intentar redactar un tratado de extensión moderada, que sea a la vez claro en su método y libre de tecnicismos escolares.* ”— Gaceta de Pall Mall.

“ *Ha hecho un libro muy interesante.* ”—Circular de editores.

“ *El señor Hinton intenta explicar la teoría de la cuarta dimensión de manera que la mente razonadora ordinaria pueda comprender lo que los matemáticos metafísicos quieren decir con ella. Si no lo consigue del todo, no es por falta de claridad por su parte, sino porque toda la teoría supone un choque absoluto para todas las ideas preconcebidas.* ”—Bristol Times.

“ *El entusiasmo del Sr. Hinton es sólo el resultado de un estudio exhaustivo, que le ha permitido presentar el tema al lector con mucha más lucidez de la que está acostumbrado.* ”— Gaceta de Pall Mall.

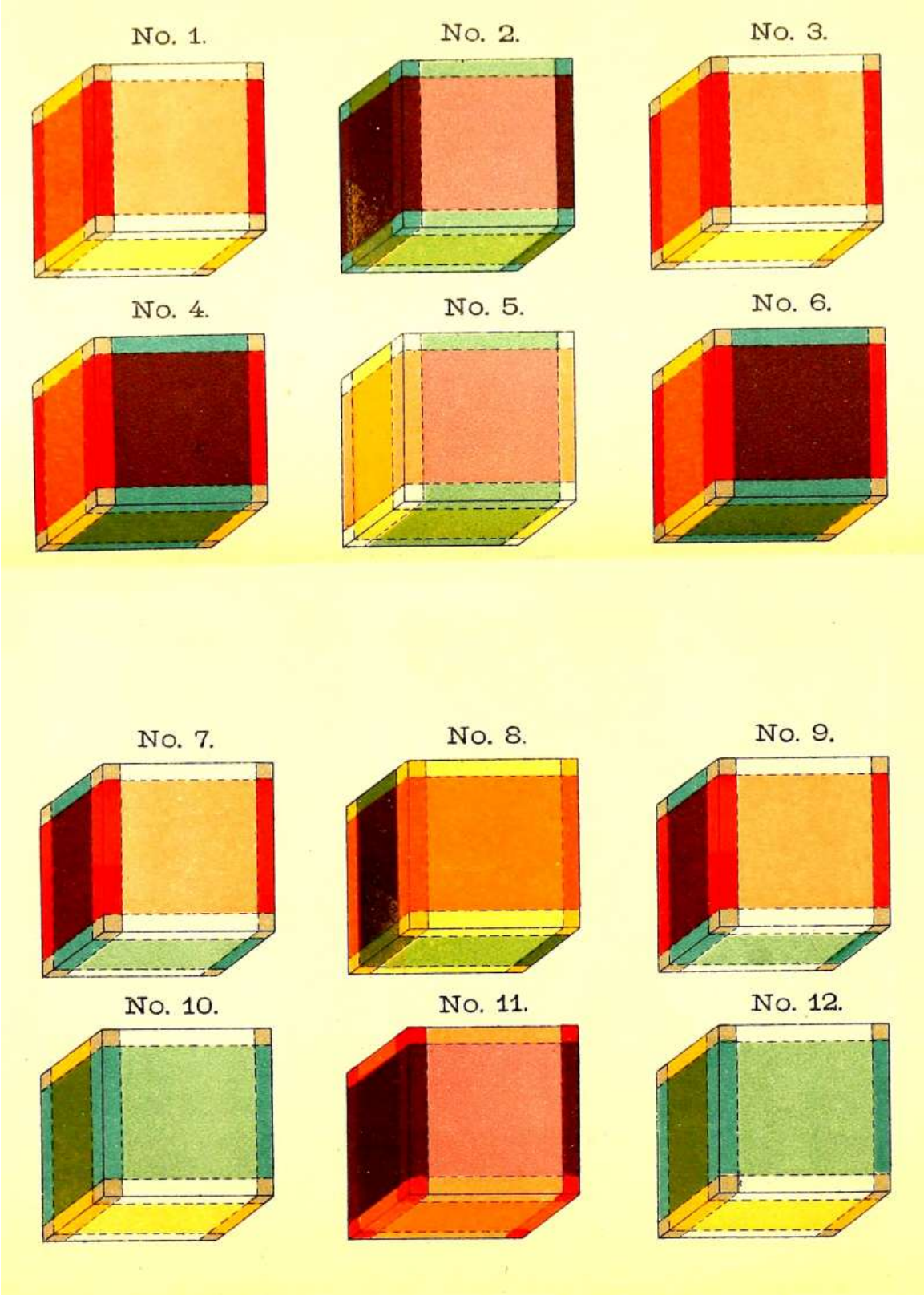
“ *Todo el libro es un razonamiento muy sólido en el ámbito de las matemáticas superiores.* ”— Heraldo de Glasgow.

“ *Quienes deseen captar el significado de este tema un tanto difícil harían bien en leer* La Cuarta Dimensión. *No se exigen conocimientos matemáticos del lector, y cualquiera que no tenga miedo de pensar un poco detenidamente debería poder seguir el argumento.* "- Luz.

“ *Una reformulación espléndidamente clara del viejo problema de la cuarta dimensión. Todos los que estén interesados en este tema encontrarán la obra no sólo fascinante, sino también lúcida, ya que está escrita en un estilo fácilmente comprensible. Las ilustraciones aclaran aún más la tipografía y el conjunto está admirablemente adaptado a las necesidades del principiante o del estudiante.* "- Dos mundos.

“ *Quienes buscan gimnasia mental encontrarán abundante ejercicio en* la Cuarta Dimensión del Sr. CH Hinton.”— Westminster Review.

Primera edición , *abril de 1904* ; Segunda edición , *mayo de 1906* .



Vistas del Tessaract.

LA
CUARTA DIMENSIÓN

POR

C. HOWARD HINTON, MA
AUTOR DE "ROMANCES CIENTÍFICOS"
"UNA NUEVA ERA DEL PENSAMIENTO", ETC., ETC.

LONDRES
SWAN SONNENSCHEIN & CO., LIMITADA
25 HIGH STREET, BLOOMSBURY

1906

IMPRESO POR
HAZELL, WATSON Y VINEY, LD.,
LONDRES Y AYLESBURY.

PREFACIO

[Pág. v]

Me he esforzado por presentar el tema de la dimensionalidad superior del espacio de una manera clara, desprovista de sutilezas y tecnicismos matemáticos. Para captar el interés del lector, en los capítulos anteriores me he detenido en la perspectiva que abre la hipótesis de una cuarta dimensión y he tratado las muchas conexiones que existen entre esta hipótesis y los temas habituales de nuestros pensamientos.

La falta de conocimientos matemáticos no supondrá ninguna desventaja para el lector, ya que no he utilizado ningún proceso matemático de razonamiento. He adoptado la opinión de que el espacio en el que normalmente pensamos, el espacio de las cosas reales (que yo llamaría materia permeable), es diferente del espacio tratado por las matemáticas. Las matemáticas nos dirán mucho sobre el espacio, del mismo modo que la teoría atómica nos dirá mucho sobre las combinaciones químicas de los cuerpos. Pero después de todo, una teoría no es exactamente equivalente al tema respecto del cual se sostiene. Por lo tanto, existe una apertura desde el lado de nuestras percepciones espaciales ordinarias para una forma simple, totalmente racional, mecánica y observacional. de tratar este tema del espacio superior, y he aprovechado esta oportunidad.

[Página vi]

Los detalles introducidos en los capítulos anteriores, especialmente en los Capítulos VIII, IX, X, tal vez puedan resultar tediosos. No tienen importancia esencial en la línea principal del argumento, y si se dejan hasta los Capítulos XI. y XII. han sido leídos, se encontrará que brindan ilustraciones interesantes y obvias de las propiedades discutidas en los capítulos posteriores.

Debo agradecer a los amigos que me ayudaron a diseñar y preparar las modificaciones de mis modelos anteriores, y en gran medida al editor de este volumen, el Sr. Sonnenschein, a cuya apreciación única de la línea de pensamiento de este, a partir de mis ensayos anteriores, se debe su publicación. Al proporcionar una lámina en color, además de otras ilustraciones, ha contribuido enormemente a la comodidad del lector.

C. Howard Hinton.

CONTENIDO

[Pág. vii]

CAP .		PÁGINA
I.	Espacio de cuatro dimensiones	1
II.	La analogía de un mundo plano	6
III.	La importancia de una existencia tetradimensional	15
IV.	El primer capítulo de la historia de Four Space	23
v.	El segundo capítulo de la historia de Four Space	41
	Metageometría de Lobatchewsky, Bolyai y Gauss	
VI.	El mundo superior	61
VII.	La evidencia de una cuarta dimensión	76
VIII.	El uso de cuatro dimensiones en el pensamiento	85
IX.	Aplicación a la teoría de la experiencia de Kant	107
X.	Una figura de cuatro dimensiones	122
XI.	Nomenclatura y analogías	136
XII.	El sólido de cuatro dimensiones más simple	157
XIII.	Observaciones sobre las figuras	178
XIV.	Una recapitulación y extensión del argumento físico	203
APÉNDICE I.	— Los modelos	231
APÉNDICE II.	— Un lenguaje del espacio	248

[Pág. viii]

CAPÍTULO I
EL ESPACIO CUATRODIMENSIONAL

No hay nada más indefinido y al mismo tiempo más real que aquello que indicamos cuando hablamos de lo "superior". En nuestra vida social lo vemos evidenciado en una mayor complejidad de las relaciones. Pero esta complejidad no lo es todo. Hay, al mismo tiempo, un contacto y una aprehensión de algo más fundamental, más real.

With the greater development of man there comes a consciousness of something more than all the forms in which it shows itself. There is a readiness to give up all the visible and tangible for the sake of those principles and values of which the visible and tangible are the representation. The physical life of civilised man and of a mere savage are practically the same, but the civilised man has discovered a depth in his existence, which makes him feel that that which appears all to the savage is a mere externality and appurtenage to his true being.

Now, this higher—how shall we apprehend it? It is generally embraced by our religious faculties, by our idealising tendency. But the higher existence has two sides. It has a being as well as qualities. And in trying to realise it through our emotions we are [Pg 2] always taking the subjective view. Our attention is always fixed on what we feel, what we think. Is there any way of apprehending the higher after the purely objective method of a natural science? I think that there is.

Plato, in a wonderful allegory, speaks of some men living in such a condition that they were practically reduced to be the denizens of a shadow world. They were chained, and perceived but the shadows of themselves and all real objects projected on a wall, towards which their faces were turned. All movements to them were but movements on the surface, all shapes but the shapes of outlines with no substantiality.

Plato uses this illustration to portray the relation between true being and the illusions of the sense world. He says that just as a man liberated from his chains could learn and discover that the world was solid and real, and could go back and tell his bound companions of this greater higher reality, so the philosopher who has been liberated, who has gone into the thought of the ideal world, into the world of ideas greater and more real than the things of sense, can come and tell his fellow men of that which is more true than the visible sun—more noble than Athens, the visible state.

Now, I take Plato’s suggestion; but literally, not metaphorically. He imagines a world which is lower than this world, in that shadow figures and shadow motions are its constituents; and to it he contrasts the real world. As the real world is to this shadow world, so is the higher world to our world. I accept his analogy. As our world in three dimensions is to a shadow or plane world, so is the higher world to our three-dimensional world. That is, the higher world is four-dimensional; the higher being is, so far as its existence is concerned apart from its qualities, to be sought through the conception of an actual existence spatially higher than that which we realise with our senses. [Pg 3]

Here you will observe I necessarily leave out all that gives its charm and interest to Plato’s writings. All those conceptions of the beautiful and good which live immortally in his pages.

Todo lo que guardo de su gran depósito de riqueza es simplemente esto: un mundo espacialmente más elevado que este mundo, un mundo al que sólo se puede acceder a través de sus cepos y piedras, un mundo que debe ser aprehendido laboriosamente, pacientemente, a través de las cosas materiales de ello, las formas, los movimientos, las figuras de ello.

Debemos aprender a realizar las formas de los objetos en este mundo del hombre superior; debemos familiarizarnos con los movimientos que hacen los objetos en su mundo, para que podamos aprender algo sobre su experiencia diaria, sus pensamientos sobre los objetos materiales, su maquinaria.

Los medios para llevar a cabo esta investigación están dados en la concepción misma del espacio.

Sucede a menudo que aquello que consideramos único y desconectado nos da, dentro de sí, aquellas relaciones mediante las cuales podemos verlo relacionado con otros, determinante y determinado por ellos.

Así, en la Tierra se da el fenómeno del peso mediante el cual Newton puso la Tierra en su verdadera relación con el Sol y otros planetas. Nuestro globo terrestre estaba determinado respecto de otros cuerpos del sistema solar mediante una relación que subsistía en la propia Tierra.

Y así el espacio mismo lleva dentro de sí relaciones de las cuales podemos determinar que está relacionado con otro espacio. Porque dentro del espacio se dan los conceptos de punto y línea, línea y plano, que realmente implican la relación del espacio con un espacio superior.

Donde termina un segmento de una línea recta y otra comienza es un punto, y la línea recta misma puede ser generada por el movimiento del punto. [Página 4]

Una parte de un plano está delimitada por otra por una línea recta, y el plano mismo puede generarse mediante la línea recta que se mueve en una dirección que no está contenida en sí misma.

De nuevo, dos porciones de espacio sólido están limitadas entre sí por un plano; y el avión, moviéndose en una dirección no contenida en sí mismo, puede generar un espacio sólido.

Así, continuando, podemos decir que el espacio es aquello que limita entre sí dos porciones del espacio superior, y que nuestro espacio generará el espacio superior moviéndose en una dirección que no está contenida en sí mismo.

Se puede obtener otra indicación de la naturaleza del espacio de cuatro dimensiones considerando el problema de la disposición de los objetos.

Si tengo varias espadas de distintos grados de brillo, puedo representarlas con respecto a esta cualidad mediante puntos dispuestos a lo largo de una línea recta.

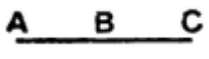


Figura 1.

Si coloco una espada en A , fig. 1 , y considera que tiene cierto brillo, entonces las otras espadas pueden disponerse en serie a lo largo de la línea, como en A , B , C , etc., según sus grados de brillo.

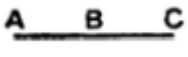


Figura 2.

Si ahora tengo en cuenta otra cualidad, digamos la longitud, se pueden disponer en un plano. A partir de A , B , C , puedo encontrar puntos que representen diferentes grados de longitud a lo largo de líneas como AF , BD , CE , dibujadas desde A , B y C. Los puntos de estas líneas representan diferentes grados de longitud con el mismo grado de brillo. Así, todo el plano está ocupado por puntos que representan todas las variedades imaginables de brillo y longitud.

[Página

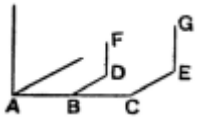


Fig. 3.

Al incorporar una tercera cualidad, digamos la nitidez, puedo dibujar, como en la fig. 3 , cualquier número de líneas verticales. Supongamos que las distancias a lo largo de estas líneas verticales representen grados de agudeza, así los puntos F y G representarán espadas de ciertos grados definidos de las tres cualidades mencionadas, y todo el espacio servirá para representar todos los grados concebibles de estas tres cualidades.

Si ahora introduzco una cuarta cualidad, como el peso, y trato de encontrar un medio de representarla como hice con las otras tres cualidades, encuentro una dificultad. Cada punto del espacio está ocupado por alguna combinación concebible de las tres cualidades ya tomadas.

Para representar cuatro cualidades del mismo modo en que he representado tres, necesitaría otra dimensión del espacio.

Así, podemos indicar la naturaleza del espacio de cuatro dimensiones diciendo que es un tipo de espacio que daría posiciones representativas de cuatro cualidades, del mismo modo que el espacio tridimensional da posiciones representativas de tres cualidades.

CAPÍTULO II

LA ANALOGÍA DE UN MUNDO PLANO

[Página 6]

A riesgo de ser algo prolijo, entraré de lleno en la experiencia de una criatura hipotética confinada al movimiento sobre una superficie plana. Al hacerlo, obtendré una analogía que nos servirá en nuestras investigaciones posteriores, porque el cambio en nuestra concepción, que hacemos al pasar de las formas y movimientos en dos dimensiones a los de tres, proporciona un patrón mediante el cual podemos pasar. aún más a la concepción de una existencia en un espacio de cuatro dimensiones.

Un trozo de papel sobre una mesa lisa ofrece una imagen clara de una existencia bidimensional. Si suponemos que el ser representado por el trozo de papel no tiene conocimiento del espesor con el que se proyecta sobre la superficie de la mesa, es obvio que no puede tener conocimiento de objetos de descripción similar, excepto por el contacto con ellos. sus bordes. Su cuerpo y los objetos de su mundo tienen un espesor del que sin embargo él no tiene conciencia. Dado que desconoce la dirección que se extiende desde la mesa, pensará que los objetos de su mundo se extienden sólo en dos dimensiones. Para él las figuras están completamente limitadas por sus líneas, del mismo modo que los objetos sólidos lo están para nosotros por sus superficies. No puede concebir acercarse al centro de un círculo, excepto atravesando la circunferencia, porque la circunferencia encierra el centro en las direcciones en las que es posible el movimiento. a él. La superficie plana sobre la que se desliza y con la que siempre está en contacto le será desconocida; no hay diferencias por las cuales pueda reconocer su existencia.

[Página 7]

Pero para los propósitos de nuestra analogía esta representación es deficiente.

Un ser así descrito no tiene nada de qué empujarse, la superficie sobre la que se desliza no le proporciona ningún medio para moverse en una dirección y no en otra. Colocado sobre una superficie sobre la cual se desliza libremente, se encuentra en una condición análoga a la que deberíamos tener si estuviéramos suspendidos libremente en el espacio. No hay nada que pueda empujar en ninguna dirección que conozca.

Modifiquemos, pues, nuestra representación. Supongamos un plano vertical contra el cual se deslizan partículas de materia fina sin abandonar nunca la superficie. Dejemos que estas partículas posean una fuerza de atracción y se cohesionen formando un disco; este disco representará el globo de un ser plano. Debe ser concebido como si existiera en el borde.

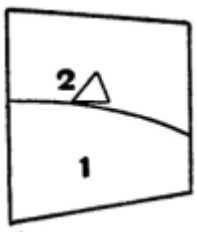


Figura 4.

Sea 1 el disco vertical de materia plana y 2 el plano que está sobre él, sobre su borde como estamos sobre la superficie de nuestra Tierra. La dirección de la fuerza de atracción de su materia le dará a la criatura un conocimiento de arriba y abajo, determinando para él una dirección en su espacio plano. Además, como puede moverse a lo largo de la superficie de su Tierra, tendrá la sensación de una dirección paralela a su superficie, que podemos llamar hacia adelante y hacia atrás.

No tendrá sentido de derecha e izquierda, es decir, de la dirección que reconocemos que se extiende desde el plano hacia nuestra derecha e izquierda.

La distinción entre derecha e izquierda es la que debemos suponer ausente, para poder proyectarnos en la condición de ser plano.

Dejemos que el lector se imagine a sí mismo mientras mira a lo largo del avión, fig. 4 , para identificarse cada vez más con el cuerpo delgado que hay sobre él, hasta que finalmente mira paralelo a la superficie del plano terrestre, y hacia arriba y hacia abajo,

[Página 8]

perdiendo el sentido de la dirección que se extiende a derecha e izquierda. Esta dirección será una dimensión desconocida para él.

Our space conceptions are so intimately connected with those which we derive from the existence of gravitation that it is difficult to realise the condition of a plane being, without picturing him as in material surroundings with a definite direction of up and down. Hence the necessity of our somewhat elaborate scheme of representation, which, when its import has been grasped, can be dispensed with for the simpler one of a thin object slipping over a smooth surface, which lies in front of us.

It is obvious that we must suppose some means by which the plane being is kept in contact with the surface on which he slips. The simplest supposition to make is that there is a transverse gravity, which keeps him to the plane. This gravity must be thought of as different to the attraction exercised by his matter, and as unperceived by him.

At this stage of our enquiry I do not wish to enter into the question of how a plane being could arrive at a knowledge of the third dimension, but simply to investigate his plane consciousness.

It is obvious that the existence of a plane being must be very limited. A straight line standing up from the surface of his earth affords a bar to his progress. An object like a wheel which rotates round an axis would be unknown to him, for there is no conceivable way in which he can get to the centre without going through the circumference. He would have spinning disks, but could not get to the centre of them. The plane being can represent the motion from any one point of his space to any other, by means of two straight lines drawn at right angles to each other. [Pg 9]

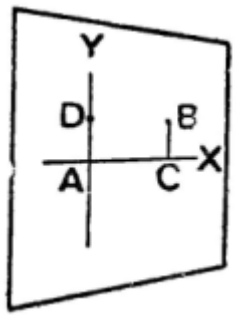


Fig. 5.

Let AX and AY be two such axes. He can accomplish the translation from A to B by going along AX to C, and then from C along CB parallel to AY.

The same result can of course be obtained by moving to D along AY and then parallel to AX from D to B, or of course by any diagonal movement compounded by these axial movements.

By means of movements parallel to these two axes he can proceed (except for material obstacles) from any one point of his space to any other.

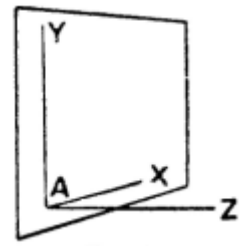


Fig. 6.

If now we suppose a third line drawn out from A at right angles to the plane it is evident that no motion in either of the two dimensions he knows will carry him in the least degree in the direction represented by AZ.

The lines AZ and AX determine a plane. If he could be taken off his plane, and transferred to the plane AXZ, he would be in a world exactly like his own. From every line in his world there goes off a space world exactly like his own.

From every point in his world a line can be drawn parallel to AZ in the direction unknown to him. If we suppose the square in fig. 7 to be a geometrical square from every point of it, inside as well as on the contour, a straight line can be drawn parallel to AZ. The assemblage of these lines constitute a solid figure, of which the square in the plane is the base. If we consider the square to represent an object in the plane being's world then we must attribute to it a very small thickness, for every real thing must possess all three dimensions. This thickness he does not perceive, but thinks of this real object as a geometrical square. He thinks of it as possessing area only, and no degree of solidity. The edges which project from the plane to a very small extent he thinks of as having merely length and no breadth—as being, in fact, geometrical lines. [Pg 10]

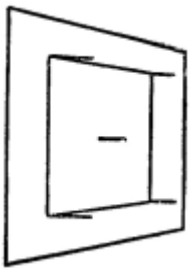


Fig. 7.

With the first step in the apprehension of a third dimension there would come to a plane being the conviction that he had previously formed a wrong conception of the nature of his material objects. He had conceived them as geometrical figures of two dimensions only. If a third dimension exists, such figures are incapable of real existence. Thus he would admit that all his real objects had a certain, though very small thickness in the unknown dimension, and that the conditions of his existence demanded the supposition of an extended sheet of matter, from contact with which in their motion his objects never diverge.

Analogous conceptions must be formed by us on the supposition of a four-dimensional existence. We must suppose a direction in which we can never point extending from every point of our space. We must draw a distinction between a geometrical cube and a cube of real matter. The cube of real matter we must suppose to have an extension in an unknown direction, real, but so small as to be imperceptible by us. From every point of a cube, interior as well as exterior, we must imagine that it is possible to draw a line in the unknown direction. The assemblage of these lines would constitute a higher solid. The lines going off in the unknown direction from the face of a cube would constitute a cube starting from that face. Of this cube all that we should see in our space would be the face.

Again, just as the plane being can represent any motion in his space by two axes, so we can represent any motion in our three-dimensional space by means of three axes. There is no point in our space to which we cannot move by some combination of movements on the directions marked out by these axes. [Pg 11]

On the assumption of a fourth dimension we have to suppose a fourth axis, which we will call AW. It must be supposed to be at right angles to each and every one of the three axes AX, AY, AZ. Just as the two axes, AX, AZ, determine a plane which is similar to the original plane on which we supposed the plane being to exist, but which runs off from it, and only meets it in a line; so in our space if we take any three axes such as AX, AY, and AW, they determine a space like our space world. This space runs off from our space, and if we were transferred to it we should find ourselves in a space exactly similar to our own.

We must give up any attempt to picture this space in its relation to ours, just as a plane being would have to give up any attempt to picture a plane at right angles to his plane.

Such a space and ours run in different directions from the plane of AX and AY. They meet in this plane but have nothing else in common, just as the plane space of AX and AY and that of AX and AZ run in different directions and have but the line AX in common.

Omitting all discussion of the manner on which a plane being might be conceived to form a theory of a three-dimensional existence, let us examine how, with the means at his disposal, he could represent the properties of three-dimensional objects.

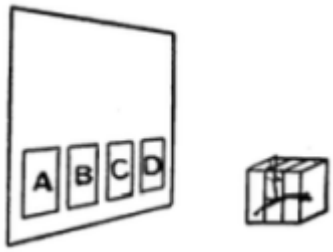


Fig. 8.

There are two ways in which the plane being can think of one of our solid bodies. He can think of the cube, fig. 8, as composed of a number of sections parallel to his plane, each lying in the third dimension a little further off from his plane than the preceding one. These sections he can represent as a series of plane figures lying in his plane, but in so representing them he destroys the coherence of them in the higher figure. The set of squares, A, B, C, D, represents the section parallel to the plane of the cube shown in figure, but they are not in their proper relative positions. [Pg 12]

The plane being can trace out a movement in the third dimension by assuming discontinuous leaps from one section to another. Thus, a motion along the edge of the cube from left to right would be represented in the set of sections in the plane as the succession of the corners of the sections A, B, C, D. A point moving from A through BCD in our space must be represented in the plane as appearing in A, then in B, and so on, without passing through the intervening plane space.

In these sections the plane being leaves out, of course, the extension in the third dimension; the distance between any two sections is not represented. In order to realise this distance the conception of motion can be employed.

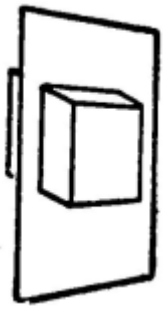


Fig. 9.

Let fig. 9 represent a cube passing transverse to the plane. It will appear to the plane being as a square object, but the matter of which this object is composed will be continually altering. One material particle takes the place of another, but it does not come from anywhere or go anywhere in the space which the plane being knows.

The analogous manner of representing a higher solid in our case, is to conceive it as composed of a number of sections, each lying a little further off in the unknown direction than the preceding. [Pg 13]

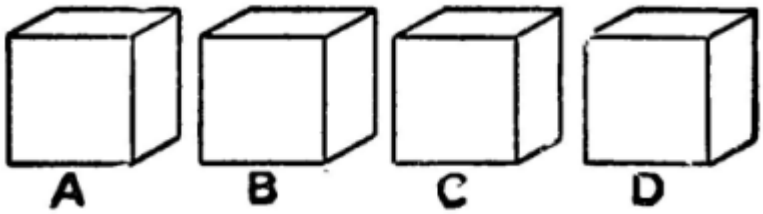


Fig. 10.

We can represent these sections as a number of solids. Thus the cubes A, B, C, D, may be considered as the sections at different intervals in the unknown dimension of a higher cube. Arranged thus their coherence in the higher figure is destroyed, they are mere representations.

A motion in the fourth dimension from A through B, C, etc., would be continuous, but we can only represent it as the occupation of the positions A, B, C, etc., in succession. We can exhibit the results of the motion at different stages, but no more.

In this representation we have left out the distance between one section and another; we have considered the higher body merely as a series of sections, and so left out its contents. The only way to exhibit its contents is to call in the aid of the conception of motion.

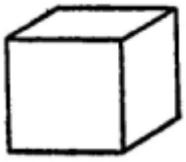


Fig. 11.

If a higher cube passes transverse to our space, it will appear as a cube isolated in space, the part that has not come into our space and the part that has passed through will not be visible. The gradual passing through our space would appear as the change of the matter of the cube before us. One material particle in it is succeeded by another, neither coming nor going in any direction we can point to. In this manner, by the duration of the figure, we can exhibit the higher dimensionality of it; a cube of our matter, under the circumstances supposed, namely, that it has a motion transverse to our space, would instantly disappear. A higher cube would last till it had passed transverse to our space by its whole distance of extension in the fourth dimension.

As the plane being can think of the cube as consisting of sections, each like a figure he knows, extending away from his plane, so we can think of a higher solid as composed of [Pg 14]

sections, each like a solid which we know, but extending away from our space.

Thus, taking a higher cube, we can look on it as starting from a cube in our space and extending in the unknown dimension.

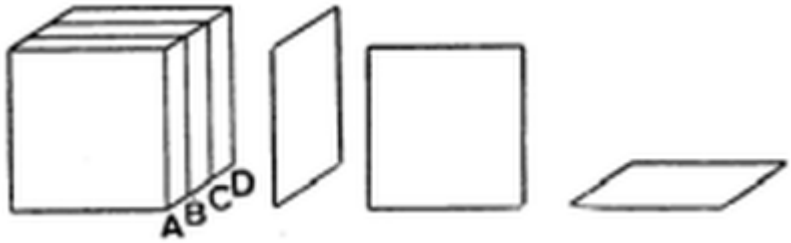


Fig. 12.

Take the face A and conceive it to exist as simply a face, a square with no thickness. From this face the cube in our space extends by the occupation of space which we can see.

But from this face there extends equally a cube in the unknown dimension. We can think of the higher cube, then, by taking the set of sections A, B, C, D, etc., and considering that from each of them there runs a cube. These cubes have nothing in common with each other, and of each of them in its actual position all that we can have in our space is an isolated square. It is obvious that we can take our series of sections in any manner we please. We can take them parallel, for instance, to any one of the three isolated faces shown in the figure. Corresponding to the three series of sections at right angles to each other, which we can make of the cube in space, we must conceive of the higher cube, as composed of cubes starting from squares parallel to the faces of the cube, and of these cubes all that exist in our space are the isolated squares from which they start.

CHAPTER III

[Pg 15]

THE SIGNIFICANCE OF A FOUR-DIMENSIONAL EXISTENCE

Having now obtained the conception of a four-dimensional space, and having formed the analogy which, without any further geometrical difficulties, enables us to enquire into its properties, I will refer the reader, whose interest is principally in the mechanical aspect, to Chapters VI. and VII. In the present chapter I will deal with the general significance of the enquiry, and in the next with the historical origin of the idea.

First, with regard to the question of whether there is any evidence that we are really in four-dimensional space, I will go back to the analogy of the plane world.

A being in a plane world could not have any experience of three-dimensional shapes, but he could have an experience of three-dimensional movements.

We have seen that his matter must be supposed to have an extension, though a very small one, in the third dimension. And thus, in the small particles of his matter, three-dimensional movements may well be conceived to take place. Of these movements he would only perceive the resultants. Since all movements of an observable size in the plane world are two-dimensional, he would only perceive the resultants in two dimensions of the small three-dimensional movements. Thus, there would be phenomena which he could not explain by his theory of mechanics—motions would take place which [Pg 16] he could not explain by his theory of motion. Hence, to determine if we are in a four-dimensional world, we must examine the phenomena of motion in our space. If movements occur which are not explicable on the suppositions of our three-dimensional mechanics, we should have an indication of a possible four-dimensional motion, and if, moreover, it could be shown that such movements would be a consequence of a four-dimensional motion in the minute particles of bodies or of the ether, we should have a strong presumption in favour of the reality of the fourth dimension.

By proceeding in the direction of finer and finer subdivision, we come to forms of matter possessing properties different to those of the larger masses. It is probable that at some stage in this process we should come to a form of matter of such minute subdivision that its particles possess a freedom of movement in four dimensions. This form of matter I speak of as four-dimensional ether, and attribute to it properties approximating to those of a perfect liquid.

Deferring the detailed discussion of this form of matter to Chapter VI., we will now examine the means by which a plane being would come to the conclusion that three-dimensional movements existed in his world, and point out the analogy by which we can conclude the existence of four-dimensional movements in our world. Since the dimensions of the matter in his world are small in the third direction, the phenomena in which he would detect the motion would be those of the small particles of matter.

Suppose that there is a ring in his plane. We can imagine currents flowing round the ring in either of two opposite directions. These would produce unlike effects, and give rise to two different fields of influence. If the Si se tomara un anillo con corriente en una [Pg 17] dirección, se le diera la vuelta y se volviera a colocar en el avión, sería idéntico al anillo que tuviera una corriente en la dirección opuesta. Una operación de este tipo sería imposible para el avión. Por lo tanto, tendría en su espacio dos objetos irreconciliables, a saber, los dos campos de influencia debidos a los dos anillos con corrientes en direcciones opuestas. Por objetos irreconciliables en el plano me refiero a objetos que no pueden considerarse transformados uno en otro por ningún movimiento en el plano.

En lugar de corrientes que fluyen por los anillos, podemos imaginar un tipo diferente de corriente. Imagine varios anillos pequeños colgados del anillo original. Una corriente alrededor de estos anillos secundarios daría dos variedades de efecto, o dos campos de influencia diferentes, según su dirección. Estas dos variedades de corriente podrían

transformarse una en otra levantando uno de los anillos, dándole la vuelta y colocándolo nuevamente en el plano. Esta operación es imposible para el ser plano, por lo que en este caso también habría dos campos irreconciliables en el plano. Ahora bien, si en el plano se encontraran dos campos tan irreconciliables y pudiera demostrar que no pueden explicarse por las corrientes en los anillos, tendría que admitir la existencia de corrientes alrededor de los anillos, es decir, en los anillos ensartados en el anillo primario. . Así llegaría a admitir la existencia de un movimiento tridimensional, pues tal disposición de las corrientes es tridimensional.

Ahora en nuestro espacio existen dos campos de diferentes propiedades, que pueden ser producidos por una corriente eléctrica que fluye en un circuito cerrado o anillo. Estos dos campos pueden transformarse uno en otro invirtiendo las corrientes, pero no pueden transformarse uno en otro girando los anillos en nuestro espacio; porque la disposición del campo con respecto al anillo mismo es diferente cuando giramos el anillo, giramos y cuando invertimos la dirección de la corriente en el anillo. [Página 18]

Como hipótesis para explicar las diferencias de estos dos campos y sus efectos podemos suponer los siguientes tipos de movimientos espaciales: primero, una corriente a lo largo del conductor; en segundo lugar, una corriente alrededor del conductor, es decir, de anillos de corrientes tendidos sobre el conductor como un eje. Ninguna de estas suposiciones da cuenta de los hechos de observación.

Por tanto, tenemos que suponer un movimiento de cuatro dimensiones. Encontramos que una rotación cuatridimensional de la naturaleza explicada en un capítulo siguiente tiene las siguientes características: Primero, nos daría dos campos de influencia, uno de los cuales podría convertirse en el otro llevando el circuito hacia arriba. la cuarta dimensión, dándole la vuelta y colocándola nuevamente en nuestro espacio, precisamente como los dos tipos de campos en el plano podrían convertirse uno en otro mediante una inversión de la corriente en nuestro espacio. En segundo lugar, implica un fenómeno precisamente idéntico a la característica más notable y misteriosa de una corriente eléctrica, a saber, que es un campo de acción, cuyo borde necesariamente linda con una frontera continua formada por un conductor. Por tanto, suponiendo un movimiento de cuatro dimensiones en la región de las diminutas partículas de materia, deberíamos esperar encontrar un movimiento análogo al de la electricidad.

Ahora bien, un fenómeno de ocurrencia tan universal como la electricidad no puede deberse a la materia y al movimiento en una relación muy compleja, sino que debe verse como una consecuencia simple y natural de sus propiedades. Infiero que la dificultad en su teoría se debe al intento de explicar un fenómeno cuatridimensional mediante una geometría tridimensional.

Ante esta evidencia no podemos descartar la que ofrece la existencia de simetría. En este sentido aludiré a la forma sencilla de producir las imágenes de insectos, a veces practicadas por niños. Ponen unas cuantas manchas de tinta en línea recta sobre un trozo de papel, doblan el papel a lo largo de las manchas y al abrirlo se obtiene la representación realista de un insecto. Si encontráramos multitud de estas figuras, concluiríamos que se originaron a partir de un proceso de plegado; las posibilidades de que se produzca este tipo de reduplicación de partes son demasiado grandes para admitir la suposición de que se hubieran formado de otra manera. [Página 19]

La producción de formas simétricas de seres organizados, aunque no se debe, por supuesto, a una rotación de cuerpos de tamaño apreciable en el espacio de cuatro dimensiones, bien puede imaginarse como debida a una disposición de esa manera de las partículas vivientes más pequeñas de las que proceden. están edificados. Por tanto, no sólo la electricidad, sino también la vida y los procesos mediante los cuales pensamos y sentimos deben atribuirse a esa región de magnitud en la que tienen lugar los movimientos cuatridimensionales.

Sin embargo, no quiero decir que la vida pueda explicarse como un movimiento cuatridimensional. Me parece que toda la tendencia del pensamiento, que tiende a

explicar los fenómenos de la vida y la volición, como debidos a la materia y el movimiento en alguna relación peculiar, se adopta más en interés de la explicabilidad de las cosas que con respecto a la probabilidad. .

Por supuesto, si pudiéramos demostrar que la vida era un fenómeno de movimiento, podríamos explicar muchas cosas que actualmente resultan oscuras. Pero hay dos grandes dificultades en el camino. Sería necesario demostrar que en un germen capaz de convertirse en ser vivo, había modificaciones de estructura capaces de determinar en el germen desarrollado todas las características de su forma, y no sólo ésta, sino de determinar las de todos los descendientes. de tal forma en una serie infinita. Tal complejidad de relaciones mecánicas, por innegable que sea, no puede Seguramente será la mejor manera de agrupar los fenómenos y dar una explicación práctica de ellos. Y otra dificultad es ésta, que ninguna adaptación mecánica daría ese elemento de conciencia que poseemos y que es compartido en un grado modificado por el mundo animal. [Página 20]

En aquellas estructuras complejas que los hombres construyen y dirigen, como un barco o un tren (y que, si fueran vistas por un observador de tal tamaño que los hombres que los guiaban fueran invisibles, parecerían presentar algunos de los fenómenos de la vida).) la aparición de animación no se debe a ninguna difusión de vida en las partes materiales de la estructura, sino a la presencia de un ser vivo.

La vieja hipótesis de un alma, un organismo vivo dentro de lo visible, me parece mucho más racional que el intento de explicar la vida como una forma de movimiento. Y cuando consideramos la región de extrema minuciosidad caracterizada por el movimiento cuatridimensional, desaparece la dificultad de concebir tal organismo junto al corporal. Lord Kelvin supone que la materia se forma a partir del éter. Podemos muy bien suponer que los organismos vivos que dirigen a los materiales están coordinados con ellos, no están compuestos de materia, sino de cuerpos etéreos y, como tales, capaces de moverse a través del éter y capaces de originar cuerpos vivos materiales en todo el mundo. mineral.

Hipótesis como éstas no encuentran fundamento inmediato para ser demostradas o refutadas en el mundo físico. Por lo tanto, pasemos a un campo diferente y, suponiendo que el alma humana es un ser de cuatro dimensiones, capaz en sí mismo de movimientos de cuatro dimensiones, pero en sus experiencias a través de los sentidos limitadas a tres dimensiones, preguntémonos si la historia de El pensamiento, de estas productividades que caracterizan al hombre, corresponden a nuestra suposición. Repasemos aquellos pasos por los cuales el hombre, presumiblemente un ser cuatridimensional El ser, a pesar de su entorno corporal, ha llegado a reconocer el hecho de la existencia cuatridimensional. [Página 21]

Dejando esta investigación para otro capítulo, recapitularé aquí el argumento para mostrar que nuestro propósito es enteramente práctico e independiente de cualquier consideración filosófica o metafísica.

Si se disparan dos tiros a un objetivo y la segunda bala lo impacta en un lugar diferente al primero, suponemos que hubo alguna diferencia en las condiciones en las que se disparó el segundo tiro con respecto a las que afectaron al primero. La fuerza de la pólvora, la dirección del objetivo, la fuerza del viento o alguna condición debieron ser diferentes en el segundo caso, si el rumbo de la bala no fue exactamente el mismo que en el primero. A cada diferencia en un resultado debe corresponderle alguna diferencia en las condiciones materiales antecedentes. Al trazar esta cadena de relaciones explicamos la naturaleza.

Pero también hay otro modo de explicación que aplicamos. Si nos preguntamos cuál fue la causa de que se construyera cierto barco, o de que se levantara cierta estructura, podríamos proceder a investigar los cambios en las células cerebrales de los hombres que diseñaron las obras. Cada variación en un barco o edificio de otro barco o edificio va acompañada de una variación en los procesos que ocurren en la materia cerebral de los diseñadores. Pero en la práctica esto sería una tarea muy larga.

Un modo más eficaz de explicar la producción del barco o edificio sería investigar los motivos, planes y objetivos de los hombres que los construyeron. Obtenemos un cuerpo de conocimiento acumulativo y consistente mucho más fácil y efectivamente de esta última manera.

A veces aplicamos uno y otras el otro modo de explicación.

Pero debe observarse que el método de explicación basado en el objetivo, el propósito, la voluntad, presupone siempre un sistema mecánico sobre el cual funciona la voluntad y la meta. La concepción del hombre como alguien que quiere y actúa por motivos implica la de una serie de procesos uniformes de la naturaleza que puede modificar y aplicar. En las condiciones mecánicas del mundo tridimensional, la única agencia volitiva que podemos demostrar es la agencia humana. Pero cuando consideramos el mundo de cuatro dimensiones, la conclusión permanece perfectamente abierta. [Página 22]

El método de explicación fundado en el propósito y la meta, seguramente, no comienza repentinamente con el hombre y termina con él. Hay tanto detrás de la manifestación de la voluntad y del motivo que vemos en el hombre como detrás de los fenómenos del movimiento; son coordinados y ninguno puede resolverse en el otro. Y el comienzo de la investigación de esa voluntad y motivo que se esconde detrás de la voluntad y el motivo manifestados en el campo mecánico tridimensional es la concepción de un alma, un organismo de cuatro dimensiones, que expresa su ser físico superior en la simetría de el cuerpo, y da los objetivos y motivos de la existencia humana.

Our primary task is to form a systematic knowledge of the phenomena of a four-dimensional world and find those points in which this knowledge must be called in to complete our mechanical explanation of the universe. But a subsidiary contribution towards the verification of the hypothesis may be made by passing in review the history of human thought, and enquiring if it presents such features as would be naturally expected on this assumption.

CHAPTER IV

[Pg 23]

THE FIRST CHAPTER IN THE HISTORY OF FOUR SPACE

Parmenides, and the Asiatic thinkers with whom he is in close affinity, propound a theory of existence which is in close accord with a conception of a possible relation between a higher and a lower dimensional space. This theory, prior and in marked contrast to the main stream of thought, which we shall afterwards describe, forms a closed circle by itself. It is one which in all ages has had a strong attraction for pure intellect, and is the natural mode of thought for those who refrain from projecting their own volition into nature under the guise of causality.

According to Parmenides of the school of Elea the all is one, unmoving and unchanging. The permanent amid the transient—that foothold for thought, that solid ground for feeling on the discovery of which depends all our life—is no phantom; it is the image amidst deception of true being, the eternal, the unmoved, the one. Thus says Parmenides.

But how explain the shifting scene, these mutations of things!

"Illusion," answers Parmenides. Distinguishing between truth and error, he tells of the true doctrine of the one—the false opinion of a changing world. He is no less memorable for the manner of his advocacy than for the cause he advocates. It is as if from his firm [Pg 24] foothold of being he could play with the thoughts under the burden of which others laboured, for from him springs that fluency of supposition and hypothesis which forms the texture of Plato's dialectic.

Can the mind conceive a more delightful intellectual picture than that of Parmenides, pointing to the one, the true, the unchanging, and yet on the other hand ready to discuss all manner of false opinion, forming a cosmogony too, false "but mine own" after the fashion of the time?

In support of the true opinion he proceeded by the negative way of showing the self-contradictions in the ideas of change and motion. It is doubtful if his criticism, save in minor points, has ever been successfully refuted. To express his doctrine in the ponderous modern way we must make the statement that motion is phenomenal, not real.

Let us represent his doctrine.

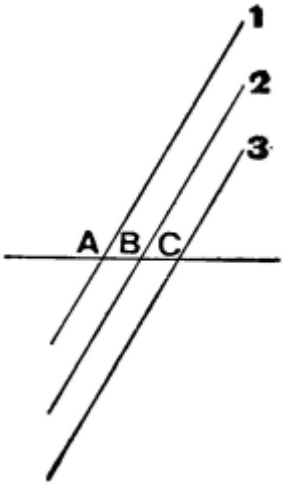


Fig. 13.

Imaginemos una lámina de agua tranquila en la que se baja un palo inclinado con un movimiento vertical hacia abajo. Sean 1, 2, 3 (Fig. 13), tres posiciones consecutivas del palo. A , B , C , serán tres posiciones consecutivas del encuentro del palo, con la superficie del agua. A medida que el palo pasa hacia abajo, la reunión pasará de A a B y C.

Supongamos ahora que se va a eliminar toda el agua excepto una película. En el encuentro de la película y el palo habrá una interrupción de la película. Si suponemos que la película tiene la propiedad, como la de una pompa de jabón, de cerrarse alrededor de cualquier objeto penetrante, entonces, a medida que el palo desciende verticalmente hacia abajo, la interrupción de la película seguirá adelante.

Si pasamos una espiral a través de la película, la intersección [Página 25] dará un punto que se mueve en un círculo mostrado por las líneas de puntos en la figura. Supongamos ahora que la espiral se detiene y la película se mueve verticalmente hacia arriba, toda la espiral quedará representada en la película de las posiciones consecutivas del punto de intersección. En la película, la existencia permanente de la espiral se experimenta como una serie de tiempo:

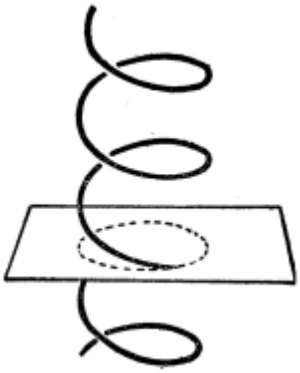


Figura 14.

el registro de atravesar la espiral es un punto que se mueve en un círculo. Si ahora suponemos una conciencia conectada con la película de tal manera que la intersección de la espiral con la película da lugar a una experiencia consciente, veremos que tendremos en la película un punto que se mueve en círculo, consciente de su movimiento. , sin saber nada de esa espiral real cuyo registro de las sucesivas intersecciones de las cuales la película es el movimiento del punto.

Es fácil imaginar estructuras complicadas del tipo de la espiral, estructuras formadas por filamentos, y suponer también que estas estructuras se distinguen entre sí en cada sección. Si consideramos las intersecciones de estos filamentos con la película a su paso como los átomos que constituyen un universo cinematográfico, tendremos en la película un mundo de movimiento aparente; Tendremos cuerpos correspondientes a la estructura filamentosa, y las posiciones de estas estructuras entre sí darán lugar a cuerpos en la película que se mueven entre sí. Este movimiento mutuo es simplemente aparente. La realidad es la de estructuras permanentes estacionarias, y todos los movimientos relativos explicados por un movimiento constante de la película en su conjunto.

Así, podemos imaginar un mundo plano, en el que toda la variedad del movimiento sea el fenómeno de estructuras formadas por átomos filamentosos atravesados por un plano de conciencia. Pasando a las cuatro dimensiones y a nuestro espacio, podemos concebir que todas las cosas y movimientos en nuestro mundo son la lectura de una realidad permanente por parte de un espacio de conciencia. Cada átomo en cada momento no es lo que era, sino una nueva parte de esa línea interminable que es él mismo. Y todo este sistema revelado sucesivamente en el tiempo, que no es más que la sucesión de la conciencia, por separado que esté en partes, en su totalidad es una vasta unidad. Al representar así la doctrina de Parménides, logramos aferrarnos a ella con más firmeza que si simplemente dejáramos que sus palabras reposaran, grandiosas y masivas, en nuestras mentes. Y hemos conseguido también los medios para representar fases de ese pensamiento oriental que Parménides no era ajeno. Modificando su doctrina intransigente, supongamos, para volver al plano de la conciencia y a la estructura de los átomos filamentosos, que estas estructuras en sí mismas se mueven, actúan, viven. Entonces, en el movimiento transversal de la película, habría dos fenómenos de movimiento, uno debido a la lectura en la película de las existencias permanentes tal como son en sí mismas, y otro fenómeno de movimiento debido a la modificación del registro de las cosas mismas, por su movimiento propio durante el proceso de atravesarlas. [Página 26]

Así, un ser consciente en el plano tendría, por así decirlo, una doble experiencia. En el recorrido completo de la estructura, cuya intersección con la película le da todo a su conciencia, los principales movimientos y acciones por los que pasó serían el registro de su yo superior tal como existía inmóvil e inactivo. Ligeras modificaciones y desviaciones de estos movimientos y acciones representarían la actividad y la autodeterminación del ser completo, de su yo superior.

Es admisible suponer que la conciencia en el plano participa en esa volición por la cual se determina la existencia completa. Así, el motivo y la voluntad, la iniciativa y la vida del ser superior, estarían representados en el caso del ser de la película por una iniciativa y una voluntad capaces, no de determinar grandes cosas o movimientos importantes en su existencia, sino sólo de actividades pequeñas y relativamente insignificantes. En todos los aspectos principales de su vida, su experiencia sería representativa de un estado del ser superior cuya existencia determina la suya a medida que avanza la película. Pero en sus acciones minúsculas y aparentemente sin importancia compartiría esa voluntad y determinación por las cuales actúa y vive todo el ser que realmente es. [Página 27]

Una alteración del ser superior correspondería para él a una historia de vida diferente. Supongamos ahora que una película tras otra atraviesa estas estructuras superiores, que la vida del ser real se lee una y otra vez en sucesivas oleadas de conciencia. Habría una sucesión de vidas en los diferentes planos de conciencia en avance, cada una diferente de la anterior, y diferente en virtud de esa voluntad y actividad que en la anterior no se había dedicado a las cosas mayores y aparentemente más significativas de la vida, sino a minucioso y aparentemente sin importancia. En todas las grandes cosas, el ser de la película comparte la existencia de su yo superior tal como es en cada momento. En las cosas pequeñas comparte esa volición por la cual el ser superior se altera y cambia, actúa y vive.

Así obtenemos la concepción de una vida que cambia y se desarrolla como un todo, una vida en la que nuestra separación, cesación y fugitividad son meramente aparentes, pero que en sus acontecimientos y curso se altera, cambia y se desarrolla; y el poder de alterar y cambiar este todo reside en la voluntad y el poder que tiene el ser limitado de dirigirse, guiarse, alterarse a sí mismo en las minucias de su existencia.

Transfiriendo nuestras concepciones a las de una existencia en una dimensionalidad superior atravesada por un espacio de conciencia, tenemos una ilustración de un pensamiento que ha encontrado expresión frecuente y variada. Sin embargo, cuando nos preguntamos qué grado de verdad hay en ello, debemos admitir que, hasta donde podemos ver, es meramente simbólico. El verdadero camino en la investigación de una dimensionalidad superior va en otra dirección. [Página 28]

La importancia de la doctrina parmenidea reside en que aquí, como una y otra vez, encontramos que aquellas concepciones que el hombre introduce de sí mismo, que no deriva del mero registro de su experiencia exterior, tienen una sorprendente y significativa correspondencia con las concepción de una existencia física en un mundo de un espacio superior. Es imposible decir hasta qué punto nos acercamos al pensamiento de Parménides mediante esta forma de representación. Lo que quiero señalar es lo adecuado de la ilustración, no sólo para dar un modelo estático de su doctrina, sino uno capaz, por así decirlo, de una modificación plástica en una correspondencia con formas de pensamiento afines. Una de dos cosas debe ser cierta: que las concepciones cuatridimensionales dan un poder maravilloso para representar el pensamiento de Oriente, o que los pensadores de Oriente deben haber estado observando y considerando la existencia cuatridimensional.

Pasando ahora a la corriente principal de pensamiento, debemos detenernos con cierto detalle en Pitágoras, no por su relación directa con el tema, sino por su relación con los investigadores que vinieron después.

Pitágoras inventó el conteo bidireccional. Representemos el conteo unidireccional mediante los postulados *aa* , *ab* , *ac* , *ad* , usando estos pares de letras en lugar de los números 1, 2, 3, 4. En cada caso pongo primero una a *por* una razón que inmediatamente aparecer.

Tenemos una secuencia y un orden. No existe necesariamente una concepción de distancia involucrada. La diferencia entre los postulados es uno de orden, no de distancia; sólo cuando se identifica con un número de cosas materiales iguales en yuxtaposición surge la noción de distancia. [Página 29]

Ahora, además de las series simples que puedo tener, partiendo de *aa* , *ba* , *ca* , *da* , *ab* , *bb* , *cb* , *db* , etcétera, y formando un esquema:

da	*base de datos*	*corriente continua*	*dd*
California	*cb*	*cc*	*cd*
licenciado en Letras	*cama y desayuno*	*antes de Cristo*	*bd*
Automóvil club británico	*ab*	*C.A*	*anuncio*

Este complejo o variedad da un orden bidireccional. Puedo representarlo mediante un conjunto de puntos, si me guardo de asumir cualquier relación de distancia.

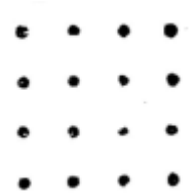


Figura 15.

Pitágoras estudió esta doble forma de contar con referencia a los cuerpos materiales y descubrió la propiedad más notable de la combinación de número y materia que lleva su nombre.

La propiedad pitagórica de un sistema material extendido puede exhibirse de una manera que nos será útil más adelante y que, por tanto, emplearé ahora en lugar del tipo de figura que él mismo empleó.

Considere un campo doble de puntos dispuestos en filas regulares. Tal campo será presupuesto en el siguiente argumento.

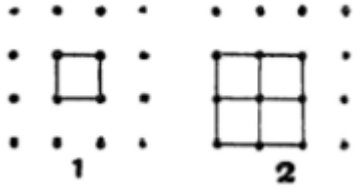


Figura 16.

Es evidente que en la fig. 16 cuatro de los puntos determinan un cuadrado, cuadrado que podemos tomar como unidad de medida de áreas. Pero también podemos medir áreas de otra forma.

La Fig. 16 (1) muestra cuatro puntos que determinan un cuadrado.

Pero también cuatro cuadrados se encuentran en un punto, fig. 16 (2).

Por tanto, un punto en la esquina de un cuadrado pertenece por igual a cuatro cuadrados.

Por tanto, podemos decir que el valor en puntos del cuadrado mostrado es un punto, porque si tomamos el cuadrado de la fig. 16 (1) tiene cuatro puntos, pero cada uno de ellos pertenece por igual a otros cuatro cuadrados. Por tanto, una cuarta parte de cada uno de ellos pertenece al cuadrado (1) de la fig. dieciséis . Por tanto, el valor en puntos del cuadrado es un punto. [Página 30]

El resultado de contar los puntos es el mismo que se obtiene al contar las unidades cuadradas encerradas.

Por lo tanto, si queremos medir el área de cualquier cuadrado, podemos tomar el número de puntos que encierra, contarlos como uno cada uno y tomar un cuarto del número de puntos en sus esquinas.

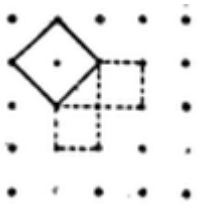


Figura 17.

Now draw a diagonal square as shown in fig. 17. It contains one point and the four corners count for one point more; hence its point value is 2. The value is the measure of its area—the size of this square is two of the unit squares.

Looking now at the sides of this figure we see that there is a unit square on each of them—the two squares contain no points, but have four corner points each, which gives the point value of each as one point.

Hence we see that the square on the diagonal is equal to the squares on the two sides; or as it is generally expressed, the square on the hypothenuse is equal to the sum of the squares on the sides.

Fig. 18.

Noticing this fact we can proceed to ask if it is always true. Drawing the square shown in fig. 18, we can count the number of its points. There are five altogether. There are four points inside the square on the diagonal, and hence, with the four points at its corners the point value is 5—that is, the area is 5. Now the squares on the sides are respectively of the area 4 and 1. Hence in this case also the square on the diagonal is equal to the sum of the square on the sides. This property of matter is one of the first great discoveries of applied mathematics. We shall [Pg 31]

prove afterwards that it is not a property of space. For the present it is enough to remark that the positions in which the points are arranged is entirely experimental. It is by means of equal pieces of some material, or the same piece of material moved from one place to another, that the points are arranged.

Pythagoras next enquired what the relation must be so that a square drawn slanting-wise should be equal to one straight-wise. He found that a square whose side is five can be placed either rectangularly along the lines of points, or in a slanting position. And this square is equivalent to two squares of sides 4 and 3.

Here he came upon a numerical relation embodied in a property of matter. Numbers immanent in the objects produced the equality so satisfactory for intellectual apprehension. And he found that numbers when immanent in sound—when the strings of a musical instrument were given certain definite proportions of length—were no less captivating to the ear than the equality of squares was to the reason. What wonder then that he ascribed an active power to number!

We must remember that, sharing like ourselves the search for the permanent in changing phenomena, the Greeks had not that conception of the permanent in matter that we have. To them material things were not permanent. In fire solid things would vanish; absolutely disappear. Rock and earth had a more stable existence, but they too grew and decayed. The permanence of matter, the conservation of energy, were unknown to them. And that distinction which we draw so readily between the fleeting and permanent causes of sensation, between a sound and a material object, for instance, had no tiene el mismo [Pg 32]
significado para ellos que para nosotros. Imaginemos por un momento que las cosas materiales son fugaces, desaparecen, y entraremos con una apreciación mucho mejor en esa búsqueda de lo permanente que, para los griegos, como para nosotros, es la principal exigencia intelectual.

¿Qué es aquello que en mil formas es siempre el mismo, que podemos reconocer en todas sus vicisitudes, cuya apariencia son los diversos fenómenos?

Pensar que esto es un número no es tan descabellado. Con una aprensión intelectual que superó con creces las evidencias de su aplicación, los atomistas afirmaron que había partículas materiales eternas que, por su unión, producían todas las diversas formas y estados de los cuerpos. Pero en vista de los hechos observados de la naturaleza tal como se conocía entonces, Aristóteles, con perfecta razón, se negó a aceptar esta hipótesis.

Afirma expresamente que hay un cambio de cualidad y que el cambio debido al movimiento es sólo uno de los posibles modos de cambio.

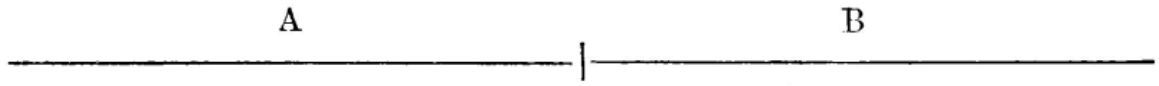
Sin un mundo material permanente a nuestro alrededor, con lo fugaz y lo no permanente a nuestro alrededor, creo que deberíamos estar dispuestos a seguir a Pitágoras en su identificación del número con ese principio que subsiste en medio de todos los cambios, que en multitud de formas aprehendemos como inmanente en nosotros. la sustancia cambiante y desaparecida de las cosas.

Y del idealismo numérico de Pitágoras no hay más que un paso hacia el idealismo más rico y pleno de Platón. Aquello que se percibe mediante el sentido del tacto lo consideramos primario y real, y decimos que los demás sentidos se refieren meramente a las apariencias. Pero Platón las consideró todas válidas, como cualidades de existencia. Que las cualidades no fueran permanentes en el mundo dadas a los sentidos lo obligó a atribuirles un significado diferente. tipo de permanencia. Formó la concepción de un [Página 33]
mundo de ideas, en el que todo lo que realmente es, todo lo que nos afecta y proporciona la rica y maravillosa riqueza de nuestra experiencia, no es fugaz y transitorio, sino eterno. Y de esto real y eterno vemos en las cosas que nos rodean imágenes fugaces y transitorias.

Y este mundo de ideas no era exclusivo, en el que no había lugar para las convicciones más íntimas del alma y sus afirmaciones más autorizadas. Allí existía la justicia, la belleza: lo único, lo bueno, todo lo que el alma exigía ser. El mundo de las ideas,

maravillosa creación de Platón, preservado para el hombre, para su deliberada investigación y su seguro desarrollo, todo lo que los rudos e incomprensibles cambios de una dura experiencia dispersan y destruyen.

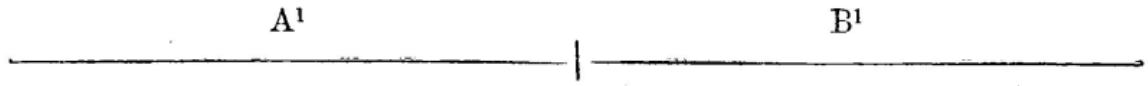
Platón creía en la realidad de las ideas. Nos recibe de manera justa y directa. Divide una línea en dos partes, dice; uno para representar los objetos reales del mundo, el otro para representar las apariencias transitorias, como la imagen en aguas tranquilas, el brillo del sol sobre una superficie brillante, las sombras en las nubes.



Cosas reales:
***por ejemplo* , el sol.**

Apariciones:
***por ejemplo* , el reflejo del sol.**

Tome otra línea y divídala en dos partes, una que represente nuestras ideas, los ocupantes ordinarios de nuestras mentes, como la blancura, la igualdad, y la otra que represente nuestro verdadero conocimiento, que es de principios eternos, como la belleza y la bondad.



Principios eternos,
como belleza.

Apariciones en la mente,
como blancura, igualdad.

Entonces como A es para B, así es A^1 para B^1

Es decir, el alma puede proceder, alejándose de lo real. cosas a una región de perfecta certeza, donde contempla lo que es, no los reflejos dispersos; contempla el sol, no el brillo de las arenas; ser verdadero, no una opinión casual. [Página 34]

Ahora bien, esto es para nosotros, como lo fue para Aristóteles, absolutamente inconcebible desde un punto de vista científico. Podemos entender que un ser es conocido en la plenitud de sus relaciones; es en su relación con sus circunstancias que se conoce el carácter de un hombre; es en sus actos bajo sus condiciones que su carácter existe. No podemos captar ni concebir ningún principio de individuación aparte de la plenitud de las relaciones con el entorno.

Pero supongamos ahora que Platón está hablando del hombre superior: el ser cuatridimensional que está limitado en nuestra experiencia externa a un mundo tridimensional. ¿No empiezan a tener sentido sus palabras? Un ser así tendría una conciencia de movimiento que no es como el movimiento que puede ver con los ojos del cuerpo. Él, en su propio ser, conoce una realidad para la cual la materia exterior de esta tierra demasiado sólida es una superficialidad endeble. Él también conoce un modo de ser, la plenitud de las relaciones, que sólo pueden representarse en el limitado mundo de los sentidos, como el pintor retrata sin sustancia las profundidades de los bosques, las llanuras y el aire. Pensando en tal ser en el hombre, ¿no estaba bien dividida la línea de Platón?

Es digno de mención que, si Platón omitiera su doctrina del origen independiente de las ideas, presentaría exactamente el argumento cuatridimensional; algo real tal como pensamos que es una idea. La idea que un ser plano tiene de un objeto cuadrado es la idea de una abstracción, es decir, un cuadrado geométrico. De manera similar, nuestra idea de una cosa sólida es una abstracción, porque en nuestra idea no existe el espesor cuatridimensional que es necesario, por pequeño que sea, para dar realidad. El argumento entonces sería, como lo es una sombra para un objeto sólido, así es el objeto sólido para la realidad. Así se identificarían A y B´.

En la alegoría a la que ya he aludido, Platón muestra casi con otras palabras la relación entre la existencia en una superficie y en el espacio sólido. Y utiliza esta relación para [Página 35]

señalar las condiciones de un ser superior.

Imagina a varios hombres prisioneros, encadenados de manera que miran a la pared de una caverna en la que están confinados, de espaldas a la carretera y a la luz. Por el camino pasan hombres y mujeres, figuras y procesiones, pero de todo este espectáculo lo único que ven los prisioneros es su sombra en la pared que contemplan. Sus propias sombras y las sombras de las cosas en el mundo son todo lo que ven, e identificándose con sus sombras relacionadas como sombras con un mundo de sombras, viven en una especie de sueño.

Platón imagina que uno de ellos pasa de entre ellos al mundo espacial real y luego regresa para contarles su condición.

Aquí presenta más claramente la relación entre la existencia en un mundo plano y la existencia en un mundo tridimensional. Y utiliza esta ilustración como un tipo de la manera en que debemos proceder a un estado superior a partir de la vida tridimensional que conocemos.

¡Debe haber pendido sobre el peso de una sombra qué camino tomó! Ya sea el que seguiremos hacia el sólido superior y la existencia cuatridimensional, o el que hace de las ideas las realidades superiores, y la percepción directa de ellas la contacto con el mundo más verdadero.

Pasando a Aristóteles, tocaremos los puntos que conciernen más inmediatamente a nuestra investigación.

Así como un científico de hoy en día, al revisar las especulaciones del mundo antiguo, las trataría con una curiosidad medio divertida pero totalmente respetuosa, preguntando a todos y cada uno de ellos dónde reside su interés. relación con los hechos, por eso Aristóteles, al analizar la filosofía de Grecia tal como la encontró, pregunta, por encima de todas las demás cosas: "¿Representa esto el mundo? ¿En este sistema hay una presentación adecuada de lo que es?" [Página 36]

Los encuentra todos defectuosos, algunos por las mismas razones por las que los estimamos más, como cuando critica la teoría atómica por reducir todo cambio a movimiento. Pero en la elevada marcha de su razón nunca pierde de vista el todo; y aquello en lo que nuestras opiniones difieren de las suyas no radica tanto en la superioridad de nuestro punto de vista, sino en el hecho que él mismo enuncia: que es imposible que un principio sea válido en todas las ramas de la investigación. Las concepciones de un método de investigación no son las de otro; y nuestra divergencia radica en nuestra atención exclusiva a las concepciones útiles en una forma de aprehender la naturaleza más que a cualquier posibilidad que encontremos en nuestras teorías de dar una visión del todo que trascienda la de Aristóteles.

Él tiene en cuenta todo; no separa la materia y la manifestación de la materia; él enciende todos juntos en una concepción de un vasto proceso mundial en el que todo toma parte (el movimiento de un grano de polvo, el desarrollo de una hoja, el movimiento ordenado de las esferas en el cielo), todos son partes de un todo que él No separarse en materia muerta y modificaciones adventicias.

Y así como nuestras teorías, como representativas de la realidad, caen ante su inigualable comprensión de los hechos, así también cayó la doctrina de las ideas. No es una explicación adecuada de la existencia, como muestra el propio Platón en su "Parménides"; sólo explica las cosas poniendo a su lado a sus dobles.

Por su parte, Aristóteles inventó una gran definición de marcha que, con una especie de poder propio, se abre paso a través de los fenómenos hasta concepciones limitantes sobre ellos. de ambos lados, hacia cuya existencia apunta toda experiencia. [Página 37]

En la definición de Aristóteles de la materia y la forma como constituyentes de la realidad, como en la visión mística de Platón del reino de las ideas, la existencia de una

dimensionalidad superior está implícitamente involucrada.

La sustancia según Aristóteles es relativa, no absoluta. En todo lo que existe está la materia de que está compuesto, la forma que exhibe; pero ambos están indisolublemente conectados y ninguno puede pensarse sin el otro.

Los bloques de piedra con los que se construye una casa son el material del constructor; pero, en cuanto a los canteros, son la materia de las rocas con la forma que él les ha impuesto. Las palabras son el producto final del gramático, pero la mera materia del orador o del poeta. Para nosotros el átomo es aquello a partir de lo cual se forman las sustancias químicas, pero, visto desde otro punto de vista, es el resultado de procesos complejos.

En ninguna parte encontramos finalidad. La materia en una esfera es la materia, más la forma, de otra esfera de pensamiento. Haciendo una aplicación obvia a la geometría, las figuras planas existen como la limitación de diferentes porciones del plano entre sí. En las líneas delimitadoras la materia separada del plano muestra su determinación en la forma. Y así como el plano es materia relativa a las determinaciones en el plano, así el plano mismo existe en virtud de la determinación del espacio. Un plano es aquel en el que el espacio informe tiene una forma superpuesta y da una realidad de relaciones reales. No podemos negarnos a llevar este proceso de razonamiento un paso más atrás y decir que el espacio mismo es lo que da forma al espacio superior. Así como la línea es la determinación de un plano y el plano de un sólido, así el espacio sólido mismo es la determinación de un espacio superior.

Como una línea por sí sola es inconcebible sin ese plano que separa, por lo que el plano es inconcebible sin los sólidos que limita a cada lado. Y, por tanto, el espacio en sí no puede definirse positivamente. Es la negación de la posibilidad de movimiento en más de tres dimensiones. La concepción del espacio exige la de un espacio superior. Así como una superficie es delgada e insustancial sin la sustancia de la que es superficie, así la materia misma es delgada sin la materia superior. [Página 38]

Así como Aristóteles inventó ese método algebraico de representar cantidades desconocidas mediante meros símbolos, no mediante líneas necesariamente determinadas en longitud como era costumbre de los geómetras griegos, y así abrió el camino hacia aquellas objetivaciones del pensamiento que, como máquinas independientes de razonamiento, proporcionó al matemático sus armas analíticas, de modo que al formular la doctrina de la materia y la forma, de la potencialidad y la actualidad, de la relatividad de la sustancia, produjo otro tipo de objetivación de la mente: una definición que tenía una fuerza vital y una actividad. de su propia.

Hasta donde sabemos, en ninguno de sus escritos lo llevó a su conclusión legítima en el lado de la materia, pero en dirección a las cualidades formales fue conducido a su concepción limitante de la existencia de la forma pura que se encuentra más allá. toda determinación conocida de la materia. El motor inmóvil de todas las cosas es el principio más elevado de Aristóteles. Hacia él, para participar de su perfección, todas las cosas se mueven. El universo, según Aristóteles, es un proceso activo; no adopta la concepción ilógica de que alguna vez se puso en movimiento y ha continuado desde entonces. En el sistema de Aristóteles hay lugar para la actividad, la voluntad y la autodeterminación, y también para lo contingente y accidental. No lo seguimos porque estamos acostumbrados a encontrar en la naturaleza series infinitas y no nos sentimos obligados a pasar a creer en los límites últimos a los que parecen apuntar.

Pero, aparte de llevar al límite, como principio relativo, esta doctrina de Aristóteles sobre la relatividad de la sustancia es irrefutable en su lógica. Fue el primero en mostrar la necesidad de ese camino de pensamiento que, si se sigue, conduce a la creencia en un espacio de cuatro dimensiones. [Página 39]

Por muy antagonista que fuera con Platón en su concepción de la relación práctica de la razón con el mundo de los fenómenos, en un punto coincidió con él. Y en esto mostró

la franqueza de su intelecto. Estaba más ansioso por no perder nada que por explicarlo todo. Y aquello en lo que tantos han detectado una inconsistencia, una incapacidad para liberarse de la escuela de Platón, nos parece, en relación con nuestra investigación, un ejemplo de la agudeza de su observación. Porque más allá de todo conocimiento dado por los sentidos, Aristóteles sostenía que hay una inteligencia activa, una mente que no es un receptor pasivo de impresiones externas, sino un ser activo y originario, capaz de captar conocimiento de primera mano. En el alma activa, Aristóteles reconoció algo en el hombre que no es producido por su entorno físico, algo que crea, cuya actividad es un conocimiento no derivado de los sentidos. Éste, dice, es el ser inmortal e imperecedero en el hombre.

Así vemos que Aristóteles no estaba lejos del reconocimiento de la existencia cuatridimensional, tanto fuera como dentro del hombre, y el proceso de realizar adecuadamente las figuras dimensionales superiores a las que llegaremos más adelante es una simple reducción a la práctica de su hipótesis de Un alma.

El siguiente paso en el desarrollo del drama del reconocimiento del alma en relación con nuestra concepción científica del mundo y, al mismo tiempo, el reconocimiento de aquello superior cuya apariencia superficial es el mundo tridimensional, tuvo lugar. lugar muchos siglos después. Si pasamos por alto el tiempo intermedio sin palabra es porque el alma estaba ocupada en afirmarse a sí misma por medios distintos al del conocimiento. Cuando asumió seriamente la tarea de conocer este mundo material en el que se encontraba y de dirigir el curso de la naturaleza inanimada, de ese objetivo sumamente objetivo surgió, reflejado como en un espejo, su conocimiento de sí mismo.

[Página 40]

CAPÍTULO V

[Página 41]

EL CAPÍTULO SEGUNDO DE LA HISTORIA DE CUATRO ESPACIO

LOBATCHEWSKY, BOLYAI Y GAUSS Antes de entrar en la descripción de la obra de Lobatchewsky y Bolyai, no estará fuera de lugar hacer una breve reseña de ellos, cuyos materiales se encuentran en un artículo de Franz Schmidt del año cuarenta. -segundo volumen de los *Mathematische Annalen* , y en la edición de Engel de Lobatchewsky.

Lobatchewsky era un hombre de talentos maravillosos y completos. Cuando era joven estaba lleno de vivacidad, llevando su exuberancia hasta el punto de meterse en serios problemas por hacer novatadas a un profesor y otros fenómenos. Salvado por los buenos oficios del matemático Bartels, que apreció su capacidad, logró contenerse dentro de los límites de la prudencia. Nombrado profesor en su propia universidad, Kasan, asumió sus funciones bajo el régimen de un reaccionario pietista, que se rodeaba de aduladores e hipócritas. Estimando probablemente los intereses de sus alumnos por encima de cualquier intento de resistencia vana, se convirtió en la mano derecha del tirano, impartiendo una increíble cantidad de enseñanza y desempeñando los más variados deberes oficiales. En medio de todas sus actividades, encontró tiempo para hacer importantes contribuciones a la ciencia. Su teoría de los paralelos es más estrechamente relacionado con su nombre, pero un estudio de sus escritos muestra que era un hombre capaz de continuar con las matemáticas en sus principales líneas de avance, y de un juicio capaz de discernir cuáles eran esas líneas. Nombrado rector de su Universidad, murió a edad avanzada, rodeado de amigos, honrado y rodeado de los resultados de su actividad benéfica. Para él ningún tema le faltaba, desde los fundamentos de la geometría hasta la mejora de las estufas con las que los campesinos calentaban sus casas.

[Página 42]

Nació en 1793. Su trabajo científico pasó desapercibido hasta que, en 1867, Houel, el matemático francés, llamó la atención sobre su importancia.

Johann Bolyai de Bolyai nació en Klausenburg, una ciudad de Transilvania, el 15 de diciembre de 1802.

Su padre, Wolfgang Bolyai, profesor del Colegio Reformado de Maros Vasarhely, conservó el ardor por los estudios matemáticos que le habían convertido en el compañero elegido de Gauss en sus primeros días de estudiante en Göttingen.

Encontró en Johann un alumno entusiasta. Relata que el niño saltó ante él como un demonio. Tan pronto como había enunciado un problema, el niño le daba la solución y le ordenaba que siguiera adelante. Cuando tenía trece años, su padre a veces lo enviaba a ocupar su lugar cuando estaba incapacitado para tomar sus clases. Los alumnos lo escuchaban con más atención que a su padre porque lo encontraban más claro para comprender.

En una carta a Gauss, Wolfgang Bolyai escribe:

“Mi hijo es de complexión fuerte. Ha aprendido a reconocer muchas constelaciones y las figuras ordinarias de la geometría. Hace aplicaciones acertadas de sus nociones, dibujando, por ejemplo, las posiciones de las estrellas con sus constelaciones. El invierno pasado en el campo, al ver a Júpiter, preguntó: "¿Cómo es que podemos verlo tanto desde aquí como desde ¿la ciudad? Debe estar muy lejos. Y en cuanto a tres lugares diferentes donde había estado, me pidió que se los dijera en una palabra. Yo no sabía a qué se refería y luego me preguntó si uno estaba alineado con el otro y todos en fila, o si estaban en un triángulo.

[Página 43]

“Le gusta cortar figuras de papel con unas tijeras y, sin que yo le hubiera hablado nunca de los triángulos, comentó que el triángulo rectángulo que había recortado era la mitad de un rectángulo. Ejercito su cuerpo con cuidado, sabe cavar bien en la tierra con

sus manitas. La flor puede caer y no quedar ningún fruto. Cuando tenga quince años, quiero enviártelo para que sea tu alumno.

En la autobiografía de Johann dice:

“Mi padre me llamó la atención sobre las imperfecciones y lagunas de la teoría de los paralelos. Me dijo que había obtenido resultados más satisfactorios que sus predecesores, pero que no había obtenido ninguna conclusión perfecta y satisfactoria. Ninguna de sus suposiciones tenía el grado necesario de certeza geométrica, aunque bastaron para probar el undécimo axioma y parecieron aceptables a primera vista.

"Me suplicó, deseoso no sin razón, de mantenerme al margen y evitar toda investigación sobre este tema, si no deseaba vivir toda mi vida en vano".

Johann, ante el fracaso de su padre en obtener respuesta alguna de Gauss, en respuesta a una carta en la que le pedía al gran matemático que hiciera de su hijo "un apóstol de la verdad en una tierra lejana", ingresó en la Escuela de Ingeniería de Viena. Escribe desde Temesvar, donde fue nombrado subteniente en septiembre de 1823:

“Temesvar, 3 de noviembre de 1823.

“ Querido Buen Padre ,

“Tengo tanto que escribir sobre mi descubrimiento que no conozco otra forma de comprobarlo que tomar un cuarto de hoja y escribir en ella. Quiero una respuesta a mi carta de cuatro hojas.

“I am unbroken in my determination to publish a work on Parallels, as soon as I have put my material in order and have the means. [Página 44]

“At present I have not made any discovery, but the way I have followed almost certainly promises me the attainment of my object if any possibility of it exists.

“I have not got my object yet, but I have produced such stupendous things that I was overwhelmed myself, and it would be an eternal shame if they were lost. When you see them you will find that it is so. Now I can only say that I have made a new world out of nothing. Everything that I have sent you before is a house of cards in comparison with a tower. I am convinced that it will be no less to my honour than if I had already discovered it.”

The discovery of which Johann here speaks was published as an appendix to Wolfgang Bolyai’s *Tentamen*.

Sending the book to Gauss, Wolfgang writes, after an interruption of eighteen years in his correspondence:—

“My son is first lieutenant of Engineers and will soon be captain. He is a fine youth, a good violin player, a skilful fencer, and brave, but has had many duels, and is wild even for a soldier. Yet he is distinguished—light in darkness and darkness in light. He is an impassioned mathematician with extraordinary capacities.... He will think more of your judgment on his work than that of all Europe.”

Wolfgang received no answer from Gauss to this letter, but sending a second copy of the book received the following reply:—

“You have rejoiced me, my unforgotten friend, by your letters. I delayed answering the first because I wanted to wait for the arrival of the promised little book.

“Now something about your son’s work.

"If I begin with saying that 'I ought not to praise it,' you will be staggered for a moment. But I cannot say anything else. To praise it is to praise myself, for the path your son has broken in upon and the results to which he has been led are almost exactly the same as my own reflections, some of which date from thirty to thirty-five years ago. [Pg 45]

"In fact I am astonished to the uttermost. My intention was to let nothing be known in my lifetime about my own work, of which, for the rest, but little is committed to writing. Most people have but little perception of the problem, and I have found very few who took any interest in the views I expressed to them. To be able to do that one must first of all have had a real live feeling of what is wanting, and as to that most men are completely in the dark.

"Still it was my intention to commit everything to writing in the course of time, so that at least it should not perish with me.

"I am deeply surprised that this task can be spared me, and I am most of all pleased in this that it is the son of my old friend who has in so remarkable a manner preceded me."

The impression which we receive from Gauss's inexplicable silence towards his old friend is swept away by this letter. Hence we breathe the clear air of the mountain tops. Gauss would not have failed to perceive the vast significance of his thoughts, sure to be all the greater in their effect on future ages from the want of comprehension of the present. Yet there is not a word or a sign in his writing to claim the thought for himself. He published no single line on the subject. By the measure of what he thus silently relinquishes, by such a measure of a world-transforming thought, we can appreciate his greatness.

It is a long step from Gauss's serenity to the disturbed and passionate life of Johann Bolyai—he and Galois, the two most interesting figures in the history of mathematics. For Bolyai, the wild soldier, the duellist, fell at odds with the world. It is related of him that he was challenged by thirteen officers of his garrison, a thing not unlikely to happen considering how differently he thought from every one else. He fought them all in succession—making it his only condition that he should be allowed to play on his violin for an interval between meeting each opponent. He disarmed or wounded all his antagonists. It can be easily imagined that a temperament such as his was one not congenial to his military superiors. He was retired in 1833. [Pg 46]

His epoch-making discovery awoke no attention. He seems to have conceived the idea that his father had betrayed him in some inexplicable way by his communications with Gauss, and he challenged the excellent Wolfgang to a duel. He passed his life in poverty, many a time, says his biographer, seeking to snatch himself from dissipation and apply himself again to mathematics. But his efforts had no result. He died January 27th, 1860, fallen out with the world and with himself.

METAGEOMETRY

The theories which are generally connected with the names of Lobatchewsky and Bolyai bear a singular and curious relation to the subject of higher space.

In order to show what this relation is, I must ask the reader to be at the pains to count carefully the sets of points by which I shall estimate the volumes of certain figures.

No mathematical processes beyond this simple one of counting will be necessary. [Pg 47]

Let us suppose we have before us in fig. 19 a plane covered with points at regular intervals, so placed that every four determine a square.

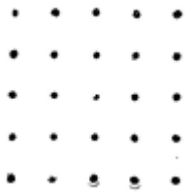


Fig. 19.

Now it is evident that as four points determine a square, so four squares meet in a point.

Thus, considering a point inside a square as belonging to it, we may say that a point on the corner of a square belongs to it and to three others equally: belongs a quarter of it to each square.

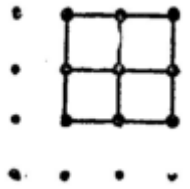


Fig. 20.

Así, el cuadrado ACDE (fig. 21) contiene un punto y tiene cuatro puntos en las cuatro esquinas. Dado que un cuarto de cada uno de estos cuatro pertenece al cuadrado, los cuatro juntos cuentan como un punto, y el valor en puntos del cuadrado es dos puntos: el que está dentro y los cuatro en la esquina forman dos puntos que le pertenecen exclusivamente.

Ahora el área de este cuadrado es de dos cuadrados unitarios, como se puede ver dibujando dos diagonales en la fig. 22 .

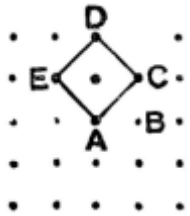


Figura 21.

También notamos que el cuadrado en cuestión es igual a la suma de los cuadrados de los lados AB , BC , del triángulo rectángulo ABC . Así reconocemos la proposición de que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados de un triángulo rectángulo.

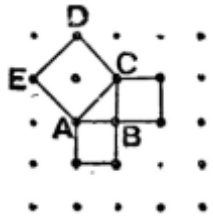


Figura 22.

Supongamos ahora que nos planteamos la cuestión de determinar el paradero en el sistema ordenado de puntos, el final de una línea llegaría cuando girara alrededor de un punto manteniendo un extremo fijo en el punto. [Página 48]

Podemos solucionar este problema en un caso particular. Si podemos encontrar un cuadrado inclinado entre los puntos que sea igual a uno que va regularmente, sabremos que los dos lados son iguales y que el lado inclinado es igual al lado recto. Así, el volumen y la forma de una figura que permanezcan sin cambios serán la prueba de que ha girado alrededor del punto, de modo que podemos decir que su lado en su primera posición se convertiría en su lado en la segunda posición.

Ahora bien, tal cuadrado se puede encontrar en aquel cuyo lado mide cinco unidades de longitud.

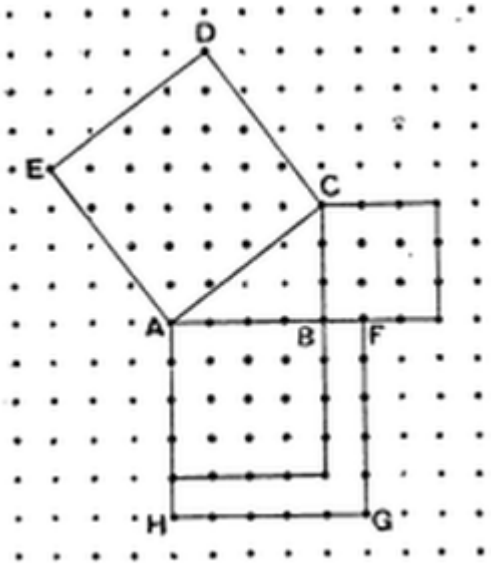


Figura 23.

En la Fig. 23 , en el cuadrado de AB , hay:

9 puntos interiores	9
4 en las esquinas	1
4 lados con 3 en cada lado, considerado como 1½ en cada lado, porque pertenecen por igual a dos cuadrados	6

El total es 16. Hay 9 puntos en el cuadrado de BC .

En la plaza de AC hay— [Página 49]

24 puntos dentro	24
4 en las esquinas	1

o 25 en total.

Por tanto vemos nuevamente que el cuadrado de la hipotenusa es igual a los cuadrados de los lados.

Ahora toma el cuadrado AFHG , que es más grande que el cuadrado de AB . Contiene 25 puntos.

16 dentro	dieciséis
16 en los lados, contando como	8
4 en las esquinas	1

haciendo 25 en total.

Si dos cuadrados son iguales concluimos que los lados son iguales. Por lo tanto, la línea AF que gira alrededor DE A se movería de modo que después de un cierto giro coincidiera con AC .

Esto es preliminar, pero involucra todas las dificultades matemáticas que se presentarán.

Hay dos alteraciones de un cuerpo por las cuales no se modifica su volumen.

Uno es el que acabamos de considerar, la rotación, el otro es lo que se llama corte.

Considere un libro o un montón de páginas sueltas. Se pueden deslizar de manera que cada uno se deslice sobre el anterior, y el conjunto adopte la forma *b* de la fig. 24 .

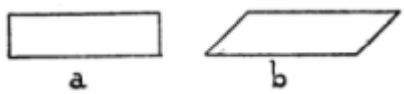


Figura 24.

Esta deformación no es sólo cortante, sino cortante acompañada de rotación.

Se puede considerar que el cizallamiento se produce de otra manera.

Tome el cuadrado ABCD (fig. 25) y suponga que se extrae a lo largo de una de sus diagonales en ambos sentidos y se comprime proporcionalmente a lo largo de la otra diagonal. Asumirá la forma de la fig. 26 .

Esta compresión y expansión a lo largo de dos líneas en ángulo recto es lo que se llama corte; es equivalente al deslizamiento ilustrado arriba, combinado con un giro. [Página 50]

En corte puro un cuerpo se comprime y se extiende en dos direcciones perpendiculares entre sí, de modo que su volumen permanece sin cambios.

Ahora sabemos que nuestros cuerpos materiales resisten el corte; el corte violenta la disposición interna de sus partículas, pero giran como un todo sin tal resistencia interna.

Pero hay una excepción. En un líquido, el corte y la rotación se producen con la misma facilidad, no hay más resistencia contra un corte que contra una rotación.

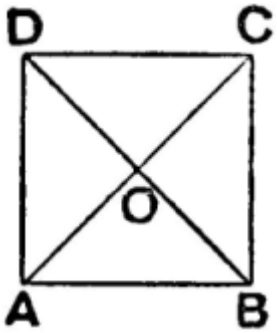


Figura 25.

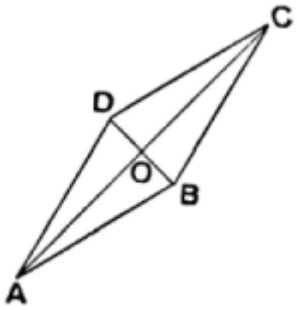


Figura 26.

Ahora bien, supongamos que todos los cuerpos fueran reducidos al estado líquido, en el que ceden con la misma facilidad al corte y a la rotación, y luego fueran reconstruidos como sólidos, pero de tal manera que el corte y la rotación hubieran intercambiado sus lugares.

Es decir, supongamos que cuando volvieran a ser sólidos se cortarían sin ofrecer resistencia interna alguna, pero una rotación violentaría su disposición interna.

Es decir, deberíamos tener un mundo en el que la cizalla habría reemplazado a la rotación.

Un corte no altera el volumen de un cuerpo: así, un habitante que viviera en un mundo así miraría un cuerpo cortado como miramos un cuerpo girado. Decía que tenía la misma forma, pero se había vuelto un poco redondo. [Página 51]

Imaginemos a un Pitágoras en este mundo poniéndose a trabajar para investigar, como tiene por costumbre.

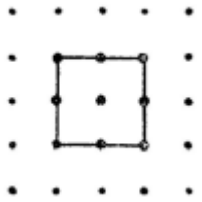


Figura 27.

La Fig. 27 representa un cuadrado sin cortar. La Fig. 28 representa un cuadrado cortado. No es la figura en la que se forma el cuadrado de la fig. 27 giraría, pero el resultado del corte en algún cuadrado no se dibujaría. Es una figura simple colocada inclinada, tomada ahora como antes tomamos un cuadrado simple colocado inclinado. Ahora bien, dado que los cuerpos en este mundo de corte no ofrecen resistencia interna al corte y mantienen su volumen cuando se cortan, un habitante acostumbrado a ellos no consideraría que alteran su forma bajo el corte. Llamaría A ACDE un cuadrado tan grande como el cuadrado de la fig. 27 . A estas figuras las llamaremos cuadrados de corte. Contando los puntos en ACDE , encontramos:

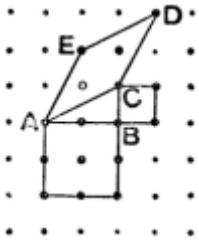


Figura 28.

2 dentro = 2
4 en las esquinas = 1

o un total de 3.

Ahora bien, el cuadrado del lado AB tiene 4 puntos, el del lado BC tiene 1 punto. Aquí el cuadrado de corte sobre la hipotenusa no tiene 5 puntos sino 3; no es la suma de los cuadrados de los lados, sino la diferencia.

Esta relación siempre se mantiene. Mira la figura. 29 . [Página 52]

Cortar el cuadrado sobre la hipotenusa—

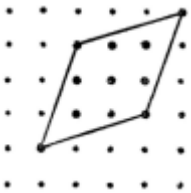


Figura 29.

7 interno	7
4 en las esquinas	1
	8

Cuadrado en un lado—que el lector puede dibujar por sí mismo—

4 internos	4
8 en los lados	4
4 en las esquinas	1
	9

y el cuadrado del otro lado es 1. Por lo tanto, en este caso nuevamente la diferencia es igual al cuadrado de corte en la hipotenusa, 9 - 1 = 8.

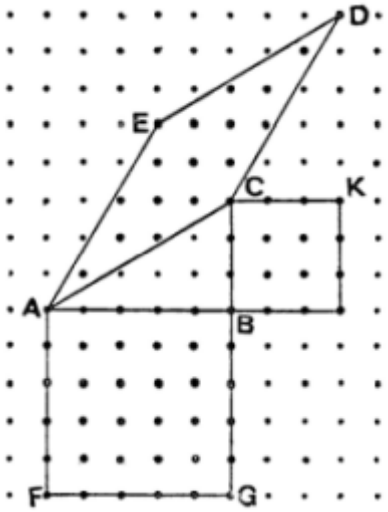


Figura 29 *bis* .

Así, en un mundo de corte, el cuadrado de la hipotenusa sería igual a la diferencia de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo.

En la Fig. 29 *bis* se dibuja otro cuadrado de corte en el que se puede probar la relación anterior.

¿Cuál sería ahora la posición que ocuparía una línea al girar por corte?

Esto lo debemos resolver de la misma manera que anteriormente con nuestro giro.

Como un cuerpo cortado sigue siendo el mismo, debemos encontrar dos cuerpos iguales, uno en forma recta y otro en forma inclinada, que tengan el mismo volumen. Entonces el lado de uno se convertirá, al girar, en el lado del otro, pues las dos figuras son cada una de ellas lo que la otra se convierte al girar.

Podemos resolver el problema en un caso particular: [Página 53]

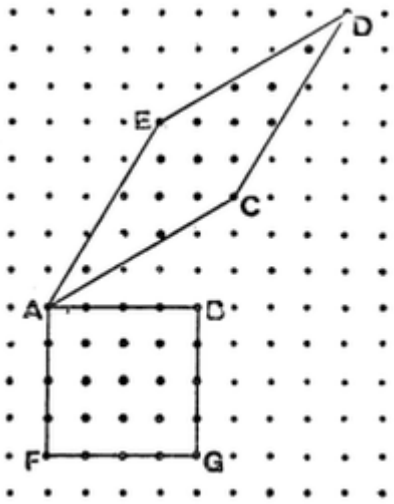


Figura 30.

En la figura ACDE (fig. 30) hay:

15 dentro	15
4 en las esquinas	1

un total de 16.

Ahora, en el cuadrado ABGF , hay 16—

9 dentro	9
12 en los lados	6
4 en las esquinas	1
	dieciséis

Por lo tanto, el cuadrado de AB se convertiría, mediante el giro de corte, en el cuadrado de corte ACDE .

Y por eso el habitante de este mundo diría que la línea AB se convirtió en la línea AC . Estas dos líneas serían para él dos líneas de igual longitud, una ligeramente alejada de la otra.

Es decir, al colocar el corte en lugar de la rotación, obtenemos un tipo diferente de figura, como resultado de la rotación del corte, de la que obtuvimos con nuestra rotación ordinaria. Y como consecuencia obtenemos una posición para el extremo de una línea de longitud invariable cuando gira por la rotación cortante, diferente de la posición que asumiría al girar por nuestra rotación.

Una varilla de material real en el mundo del corte, al girar alrededor de A , pasaría de la posición AB a la posición AC . Decimos que su longitud se altera cuando se convierte en AC , pero esta transformación de AB le parecería a un habitante del mundo cortante como un giro de AB sin alterar su longitud.

Si ahora suponemos una comunicación de ideas que tiene lugar entre uno de nosotros y un habitante del mundo, evidentemente habría una diferencia entre sus puntos de vista sobre la distancia y los nuestros. [Página 54]

Debemos decir que su línea AB aumentó de longitud al girar hacia AC . Él diría que nuestra línea AF (fig. 23) disminuyó en longitud al pasar a AC . Pensaría que lo que llamamos una línea igual es en realidad una línea más corta.

Debemos decir que una varilla que girase tendría sus extremos en las posiciones que llamamos a distancias iguales. Él también lo haría, pero las posiciones serían diferentes. Podría, como nosotros, apelar a las propiedades de la materia. Su vara hacia él cambia tan poco como la nuestra hacia nosotros.

Ahora bien, ¿existe algún criterio al que podamos apelar para decir cuál de los dos tiene razón en este argumento? No existe ningún estándar.

Debemos decir que, con un cambio de posición, la configuración y forma de sus objetos se alteraba. Diría que la configuración y la forma de nuestros objetos se alteraron en lo que llamamos simplemente un cambio de posición. Por tanto, la distancia independiente de la posición es inconcebible, o en la práctica la distancia es únicamente una propiedad de la materia.

No existe ningún principio al que cualquiera de las partes en esta controversia pueda apelar. No hay nada que conecte la definición de distancia con nuestras ideas más que con las suyas, excepto el comportamiento de un trozo de materia real.

Para el estudio de los procesos que ocurren en nuestro mundo, la definición de distancia dada mediante la suma de los cuadrados es de suma importancia para nosotros. Pero como cuestión de espacio puro y sin hacer suposiciones innecesarias, el mundo cizallado es tan posible e interesante como nuestro mundo.

Fue la geometría de mundos tan concebibles lo que estudiaron Lobatchewsky y Bolyai.

Evidentemente, este tipo de geometría no tiene nada que ver directamente con el espacio de cuatro dimensiones.

Pero de esta manera surge una conexión. Es evidente que, en lugar de tomar un corte simple como lo he hecho, y definirlo como ese cambio de disposición de las partículas de un sólido que sufrirán sin ofrecer resistencia alguna debido a su acción mutua, podría tomar un corte complejo. movimiento, compuesto por un corte y una rotación juntos, o algún otro tipo de deformación. [Página 55]

Supongamos que se selecciona y define una alteración de este tipo como la que significa rotación simple, entonces el tipo según el cual todos los cuerpos se alterarán mediante esta rotación es fijo.

Viendo los movimientos de este tipo, deberíamos decir que los objetos estaban alterando su forma además de girar. Pero a los habitantes de ese mundo les parecerían inalterados, y nuestras figuras en sus movimientos les parecerían alteradas.

En un mundo así las características de la geometría son diferentes. Hemos visto una de esas diferencias en el caso de nuestra ilustración del mundo de la fuerza cortante, donde el cuadrado de la hipotenusa era igual a la diferencia, no la suma, de los cuadrados de los lados.

En nuestra ilustración tenemos las mismas leyes de las líneas paralelas que en nuestro mundo de rotación ordinario, pero en general las leyes de las líneas paralelas son diferentes.

En uno de estos mundos de diferente constitución de la materia por un punto pueden haber dos paralelos a una línea dada, en otro de ellos no puede haber ninguno, es decir, aunque una línea se dibuje paralela a otra, se encontrará con ella después de un tiempo. tiempo.

Ahora bien, fue precisamente a este respecto de los paralelos que Lobatchewsky y Bolyai descubrieron estos mundos diferentes. No los consideraron mundos de materia, pero descubrieron que el espacio no significaba necesariamente que nuestra ley de paralelos fuera cierta. Hicieron la distinción entre leyes del espacio y leyes de la materia, aunque esa no es la forma en que expresaron sus resultados. [Página 56]

La forma en que fueron conducidos a estos resultados fue la siguiente. Euclides había planteado la existencia de líneas paralelas como un postulado –exponiendo francamente esta proposición no demostrada– de que se puede trazar una línea y sólo una paralela a una línea recta dada, como una exigencia, como algo que debe asumirse. Las palabras de su noveno postulado son éstas: “Si una línea recta que se encuentra con otras dos líneas rectas hace que los ángulos interiores de un mismo lado sean iguales a dos ángulos rectos, las dos líneas rectas nunca se encontrarán”.

A los matemáticos de épocas posteriores no les gustó esta descarada suposición y, al no poder probar la proposición, la llamaron axioma: el undécimo axioma.

Se hicieron muchos intentos para probar el axioma; nadie dudó de su veracidad, pero no se pudo encontrar ningún medio para demostrarla. Finalmente, un italiano, Sacchieri, incapaz de encontrar una prueba, dijo: "Supongamos que no es cierto". Dedujo los resultados de que posiblemente hubiera dos paralelos a una línea determinada que pasa por un punto determinado, pero sintiendo que las aguas eran demasiado profundas para la razón humana, dedicó la segunda mitad de su libro a refutar lo que había supuesto en la primera parte.

Entonces Bolyai y Lobatchewsky entraron con paso firme en el camino prohibido. No puede haber mayor evidencia de la naturaleza indomable del espíritu humano, o de su destino manifiesto de conquistar todas aquellas limitaciones que lo atan dentro de la esfera de los sentidos, que esta gran afirmación de Bolyai y Lobatchewsky.

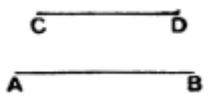


Figura 31.

Tome una recta AB y un punto C. Decimos y vemos y sabemos que por C sólo se puede trazar una recta paralela a AB .

Pero Bolyai dijo: "Sacaré dos". Sea CD paralelo a AB , es decir, no encontrarse con AB por muy lejos que se produzca, y dejar que las líneas más allá DE CD tampoco se encuentren con AB ; Sea una cierta región entre CD y CE , en la que ninguna línea trazada corta a AB . CE y CD producidos al revés a través de C darán una región similar en el otro lado de C. [Página 57]

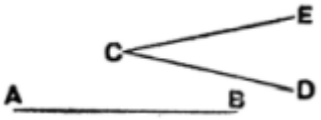


Figura 32.

Nunca antes se había escrito nada tan triunfalmente, casi se podría decir tan insolentemente, ignorando el sentido común. Los hombres habían luchado contra las limitaciones del cuerpo, lucharon contra ellas, las despreciaron, las conquistaron. Pero nadie había pensado nunca simplemente como si el cuerpo, los ojos corporales, los órganos de la visión, toda esta vasta experiencia del espacio, nunca

hubieran existido. La larga lucha entre el alma y el cuerpo, la lucha por el dominio, había llegado a su culminación. Bolyai y Lobatchewsky simplemente pensaban como si el cuerpo no existiera. La lucha por el dominio, la contienda y el combate del alma habían terminado; Habían dominado y el húngaro trazó su línea.

¿Podemos señalar alguna conexión, como en el caso de Parménides, entre estas especulaciones y el espacio superior? ¿Podemos suponer que fue alguna percepción interna por parte del alma de un movimiento no conocido por los sentidos lo que resultó en esta teoría tan libre de las ataduras de los sentidos? Tal suposición no parece posible.

En la práctica, sin embargo, la metageometría tuvo una gran influencia al poner el espacio superior en primer plano como hipótesis de trabajo. Esto se puede atribuir a la tendencia que tiene la mente a moverse en la dirección de menor resistencia. Los resultados de la nueva geometría no podían descuidarse; el problema de los paralelos había ocupado un lugar demasiado prominente en el desarrollo del pensamiento matemático como para descuidar su solución final. Pero esta absoluta independencia de todas las consideraciones mecánicas, este perfecto desprendimiento de las intuiciones familiares, era tan difícil que casi cualquier otra hipótesis era más fácil de aceptar, y cuando Beltrami demostró que la geometría de Lobatchewsky y Bolyai era la geometría de las líneas más cortas dibujadas sobre ciertas superficies curvas, manteniéndose las definiciones ordinarias de medición, Se llamó la atención sobre la teoría de un espacio superior. Una ilustración de la teoría de Beltrami la proporciona la simple consideración de seres hipotéticos que viven sobre una superficie esférica.

[Página 58]

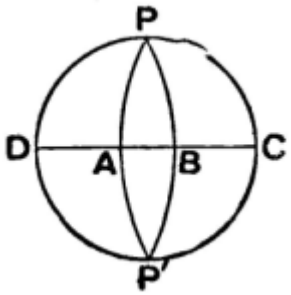


Figura 33.

Sea ABCD el ecuador de un globo, y AP , BP , las líneas de meridianos trazadas hacia el polo, P. Las líneas AB , AP , BP parecerían perfectamente rectas para una persona que se mueve sobre la superficie de la esfera y es inconsciente de su curvatura. Ahora AP y BP forman ángulos rectos con AB . Por tanto, satisfacen la definición de paralelos. Sin embargo, se encuentran en P . Por lo tanto, un ser que viviera sobre una superficie esférica, y fuera inconsciente de su curvatura, encontraría que líneas paralelas se encuentran. También encontraría que los ángulos de un triángulo eran mayores que dos ángulos rectos. En el triángulo PAB , por ejemplo, los ángulos en A y B son ángulos rectos, por lo que los tres ángulos del triángulo PAB son mayores que dos ángulos rectos.

Ahora bien, en uno de los sistemas de la metageometría (pues después de que Lobatchewsky mostró el camino se descubrió que eran posibles otros sistemas además del suyo) los ángulos de un triángulo son mayores que dos ángulos rectos.

Así, un ser en una esfera llegaría a conclusiones sobre su espacio que son las mismas que sacaría si viviera en un plano, cuya materia tuviera las propiedades que presupone uno de estos sistemas de geometría. Beltrami también descubrió cierta superficie en la que se podía dibujar más de una línea "recta" a través de un punto que no se encontraría con otra línea dada. Utilizo la palabra recta como equivalente a la línea que tiene la propiedad de dar el camino más corto entre dos puntos cualesquiera. Por tanto, sin abandonar los métodos ordinarios de medición, fue posible encontrar condiciones en las que un ser plano tendría necesariamente una experiencia correspondiente a la geometría de Lobatchewsky. Y al considerar un espacio más alto, y un sólido curvo en ese espacio más alto, era posible dar cuenta de una experiencia similar en un espacio de tres dimensiones.

[Página 59]

Ahora bien, es mucho más fácil concebir una dimensionalidad superior al espacio que imaginar que una varilla al girar no se mueve de modo que su extremo describa un círculo. Por lo tanto, al haber encontrado una concepción lógica más difícil que la de un espacio de cuatro dimensiones, el pensamiento se volvió hacia este último como una simple explicación de las posibilidades a las que Lobatchewsky lo había despertado. Los

pensadores se acostumbraron a tratar con la geometría del espacio superior (fue Kant, dice Veronese, quien utilizó por primera vez la expresión “espacios diferentes”) y con familiaridad se hizo sentir el carácter inevitable de la concepción.

A partir de este punto, sólo queda un pequeño paso para adaptar las concepciones mecánicas ordinarias a una existencia espacial superior, y entonces el reconocimiento de su existencia objetiva ya no podrá retrasarse más. También aquí, como en tantos casos, resulta que el orden y la conexión de nuestras ideas es el orden y la conexión de las cosas.

¿Cuál es la importancia del trabajo de Lobatchewsky y Bolyai?

Hay que reconocerlo como algo totalmente diferente de la concepción de un espacio superior; es aplicable a espacios de cualquier número de dimensiones. Al sumergir el concepto de distancia en la materia a la que propiamente pertenece, promete ser de gran ayuda en el análisis, ya que la distancia efectiva de dos partículas cualesquiera es la producto de condiciones materiales complejas y no puede medirse mediante reglas estrictas y rápidas. Su significado último es completamente desconocido. Es una liberación de las ataduras de los sentidos, que no coincide con el reconocimiento de una dimensionalidad superior, pero que contribuye indirectamente a ello. [Página 60]

Así, finalmente, hemos llegado a aceptar lo que Platón tenía en el hueco de su mano; lo que implica la doctrina de Aristóteles sobre la relatividad de la sustancia. El vasto universo también tiene su superior, y al reconocerlo descubrimos que el ser director que está dentro de nosotros ya no se encuentra inevitablemente fuera de nuestro conocimiento sistemático.

CAPITULO VI
EL MUNDO SUPERIOR

[Página 61]

Es realmente extraña la manera en que debemos empezar a pensar en el mundo superior.

Los objetos más simples, análogos a los que nos rodean en nuestra experiencia diaria, como una puerta, una mesa, una rueda, son remotos e incognoscibles en el mundo de las cuatro dimensiones, mientras que las ideas abstractas de rotación, tensión y tensión, elasticidad en el que el análisis resuelve los elementos familiares de nuestra experiencia diaria son transferibles y aplicables sin dificultad alguna. Así, estamos en la insólita posición de vernos obligados a construir la experiencia diaria y habitual de un ser cuatridimensional, a partir del conocimiento de las teorías abstractas del espacio, la materia, su movimiento; en lugar de, como en nuestro caso, pasar a las teorías abstractas a partir de la riqueza de las cosas sensibles.

¿Qué sería una rueda en cuatro dimensiones? ¿Cuál sería el eje para la transmisión de energía que usaría un ser de cuatro dimensiones?

La rueda de cuatro dimensiones y el eje de cuatro dimensiones son lo que nos ocupará en estas pocas páginas. Y no es una investigación inútil o insignificante. Porque en el intento de penetrar en la naturaleza de lo superior, de captar dentro de nuestro alcance aquello que trasciende todas las analogías, porque lo que conocemos son meras visiones parciales de ello, el camino puramente material y físico proporciona un medio de aproximación. Si seguimos lo cual tenemos menos probabilidades de equivocarnos que si [Página 62] utilizamos el camino más frecuentemente transitado de enmarcar concepciones que en su elevación y belleza nos parecen idealmente perfectas.

Porque cuando nos preocupamos por nuestros propios pensamientos, el desarrollo de nuestros propios ideales, estamos como en una curva, moviéndonos en cualquier momento en una dirección de tangencia. Adónde vamos, lo que establecemos y exaltamos como perfecto, no representa la verdadera tendencia de la curva, sino nuestra propia dirección en el presente: una tendencia condicionada por el pasado y por una energía vital de movimiento esencial pero sólo verdadera cuando está perpetuamente. modificado. Ese eterno corrector de nuestras aspiraciones e ideales, el universo material se aleja sublimemente de las cosas más simples que podemos tocar o manipular hacia las infinitas profundidades del espacio estrellado, en todos y cada uno de ellos sin influencia de lo que pensamos o sentimos, presentando hechos impasibles a los cuales, Pensemos que es bueno o malo, no podemos más que conformarnos, pero fuera de toda esa impasibilidad, con una referencia a algo más allá de nuestras esperanzas y temores individuales que nos sostiene y nos da nuestro ser.

Y a este gran ser llegamos con la pregunta: “Tú también, ¿cuál es tu superior?”

O para decirlo de una forma que deje nuestras conclusiones en la forma de una fórmula no estéril y ataque el problema en su lado más atacable: "¿Qué es la rueda y el eje de la mecánica de cuatro dimensiones?"

Al iniciar esta investigación debemos hacer un plan de procedimiento. El método que adoptaré es trazar los pasos del razonamiento mediante los cuales un ser confinado al movimiento en un mundo bidimensional podría llegar a una concepción de nuestro giro y rotación, y luego aplicar un proceso análogo a la consideración de la movimientos superiores. El ser plano no debe imaginarse como una figura abstracta, sino como un cuerpo real que posee las tres cosas. dimensiones. Su limitación a un avión debe ser [Página 63] resultado de condiciones físicas.

Por tanto, pensaremos en él como en una figura recortada en papel colocada sobre un plano liso. Deslizándose sobre este plano y entrando en contacto con otras figuras

igualmente delgadas como él en la tercera dimensión, las captará sólo por sus bordes. Para él estarán completamente delimitados por líneas. Un cuerpo "sólido" será para él una extensión bidimensional, a cuyo interior sólo se puede llegar atravesando las líneas delimitantes.

Ahora bien, tal ser plano puede pensar en nuestra existencia tridimensional de dos maneras.

Primero, puede pensar en ello como una serie de secciones, cada una como el sólido que sabe que se extiende en una dirección desconocida para él, que se extiende transversalmente a su universo tangible, que se encuentra en una dirección que forma ángulos rectos con cada movimiento que realizó. .

En segundo lugar, renunciando al intento de pensar en el cuerpo sólido tridimensional en su totalidad, puede considerarlo como si estuviera formado por un número de secciones planas, cada una de ellas en sí misma exactamente igual a los cuerpos bidimensionales que conoce, pero alejándose de su superficie. espacio bidimensional.

Un cuadrado que se encuentra en su espacio lo considera un sólido delimitado por cuatro líneas, cada una de las cuales se encuentra en su espacio.

Un cuadrado que se encuentra en ángulo recto con respecto a su plano le parece simplemente una línea en su plano, ya que todo él, excepto la línea, se extiende en la tercera dimensión.

Puede pensar que un cuerpo tridimensional consta de varias secciones, cada una de las cuales comienza en una línea en su espacio.

Ahora bien, dado que en su mundo puede hacer cualquier dibujo o modelo que involucre sólo dos dimensiones, puede representar cada sección vertical tal como es en realidad, y puede representar un giro de una dimensión conocida a una dimensión desconocida como un giro de una a otra. de sus dimensiones conocidas.

Para ver el todo debe renunciar a parte de lo que tiene y tomar el todo porción por porción. [Página 64]

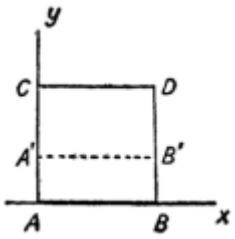


Figura 34.

Consideremos ahora un plano situado delante de un cuadrado, fig. 34 . El cuadrado puede girar alrededor de cualquier punto del plano, digamos el punto A. Pero no puede girar alrededor de una recta, como AB . Porque para girar alrededor de la recta AB , el cuadrado debe abandonar el plano y moverse en la tercera dimensión. Este movimiento está fuera de su campo de observación y, por lo tanto, salvo mediante un proceso de razonamiento, le resulta inconcebible.

Por tanto, la rotación será para él una rotación alrededor de un punto. La rotación alrededor de una línea le resultará inconcebible.

El resultado de la rotación alrededor de una línea que puede aprehender. Puede ver la primera y la última posición ocupadas en media revolución alrededor de la línea AC . El resultado de tal media revolución es colocar el cuadrado ABCD en el lado izquierdo en lugar de en el lado derecho de la línea AC . Correspondería a un tirón de todo el cuerpo ABCD a través de la línea AC , o a la producción de un cuerpo sólido que fuera su reflejo exacto en la línea AC . Sería como si el cuadrado ABCD se convirtiera en su imagen, actuando la línea AB COMO UN ESPEJO. Semejante inversión de las posiciones de las partes del cuadrado sería imposible en su espacio. Su ocurrencia sería una prueba de la existencia de una dimensionalidad superior.

Permítale ahora, adoptando la concepción de un cuerpo tridimensional como una serie de secciones situadas, cada una de ellas un poco más alejada que la anterior, en dirección

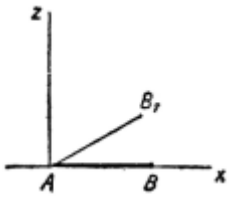


Figura 35.

perpendicular a su plano, considere un cubo, fig. 36 , como una serie de secciones, cada una como el cuadrado que forma su base, todas rígidamente conectadas entre sí.

Si ahora gira el cuadrado alrededor del punto A en el plano de *xy* , cada sección paralela gira con el cuadrado que mueve. En cada uno de los tramos hay un punto en reposo, que verticalmente sobre A . Por lo tanto, concluiría que en el giro de un cuerpo tridimensional hay una línea que está en reposo. Se trata de un giro tridimensional en torno a una recta. [Página 65]

De manera similar, considerémonos limitados a un mundo tridimensional por una condición física. Imaginemos que hay una dirección perpendicular a cada dirección en la que podemos movernos, y que nos impide pasar en esa dirección un gran sólido, contra el cual en cada movimiento que hacemos nos deslizamos como se desliza el plano que es. contra la escota de su avión.

Entonces podemos considerar que un cuerpo de cuatro dimensiones consta de una serie de secciones, cada una de ellas paralela a nuestro espacio y cada una un poco más alejada que la anterior en la dimensión desconocida.

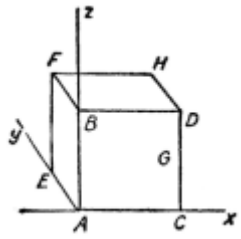


Figura 36.

Consideremos el cuerpo de cuatro dimensiones más simple, uno que comienza como un cubo, fig. 36 , en nuestro espacio, y consta de secciones, cada una de las cuales es un cubo como la fig. 36 , alejado de nuestro espacio. Si giramos el cubo que es su base en nuestro espacio alrededor de una línea, si, *por ejemplo* , en la fig. 36 giramos el cubo alrededor de la recta AB , no solo él sino cada uno de los cubos paralelos se mueve alrededor de una recta. El cubo que vemos se mueve alrededor de la línea AB , el cubo que está más allá alrededor de una línea paralela a AB y así sucesivamente. Por lo tanto, todo el cuerpo tetradimensional se mueve alrededor de un plano, pues el conjunto de estas líneas es nuestra manera de pensar acerca del plano que, partiendo de la línea AB en nuestro espacio, se desplaza en una dirección desconocida.

En este caso todo lo que vemos del plano alrededor del cual se produce el giro es la recta AB . [Página 66]

Pero es obvio que el plano del eje puede estar en nuestro espacio. Un punto cercano al plano determina con él un espacio tridimensional. Cuando comienza a girar alrededor del plano, no se mueve a ninguna parte de este espacio tridimensional, sino que sale de él. Un punto no puede girar alrededor de un plano en un espacio tridimensional, como tampoco un punto puede moverse alrededor de una línea en un espacio bidimensional.

Aplicaremos ahora el segundo de los modos de representación a este caso de giro alrededor de un plano, construyendo nuestra analogía paso a paso a partir del giro en un plano alrededor de un punto y en el espacio alrededor de una línea, y así sucesivamente.

Para reducir nuestras consideraciones a las de la mayor simplicidad posible, comprendamos cómo pensaría el ser plano el movimiento mediante el cual un cuadrado gira alrededor de una línea.

Vamos, fig. 34 , ABCD sea un cuadrado en su plano y represente las dos dimensiones de su espacio mediante los ejes A *x* A *y* .

Ahora bien, el movimiento mediante el cual el cuadrado gira alrededor de la línea AC involucra la tercera dimensión.

No puede representar el movimiento de todo el cuadrado al girar, pero puede representar los movimientos de partes de él. Llamemos al tercer eje perpendicular al plano del papel eje de z . De los tres ejes x , y , z , el ser plano puede representar dos cualesquiera en su espacio. Luego déjelo dibujar, en la fig. 35 , dos ejes, x y z . Aquí tiene en su plano una representación de lo que existe en el plano que se extiende perpendicularmente a su espacio.

En esta representación no se mostraría el cuadrado, pues en el plano de xz simplemente está contenida la línea AB del cuadrado.

El avión entonces tendría delante de él, en la fig. 35 , la representación de una recta AB de su cuadrado y dos ejes, x y z , en ángulo recto. Ahora sería obvio a él que, mediante un giro como el que conoce, mediante una rotación alrededor de un punto, la recta AB puede girar alrededor de A , y ocupando todas las posiciones intermedias, como por ejemplo AB , después de media revolución queda como AX producida . a través de A. [Página 67]
1

Nuevamente, así como puede representar el plano vertical que pasa por AB , también puede representar el plano vertical que pasa por A′B′ , fig. 34 , y de manera similar podemos ver que la línea A′B′ puede girar alrededor del punto A′ hasta quedar en la dirección opuesta a la que tomó al principio.

Ahora bien, estos dos giros no son incompatibles. En su plano, si AB girara alrededor DE A , y A′B′ alrededor de A′ , la consistencia del cuadrado se destruiría, sería un movimiento imposible de realizar para un cuerpo rígido. Pero en el giro que estudia parte por parte no hay nada inconsistente. Cada línea del cuadrado puede girar de esta manera, por lo que realizaría el giro de todo el cuadrado como la suma de un número de giros de partes aisladas. Tales giros, si tuvieran lugar en su plano, serían inconsistentes, pero en virtud de una tercera dimensión son consistentes, y el resultado de todos ellos es que el cuadrado gira alrededor de la línea AC Y se encuentra en una posición en la que está la imagen especular de lo que era en su primera posición. Así puede realizar un giro alrededor de una línea renunciando a uno de sus ejes y representando su cuerpo parte por parte.

Apliquemos este método al giro de un cubo para que se convierta en la imagen especular de sí mismo. En nuestro espacio podemos construir tres ejes independientes, x , y , z , como se muestra en la fig. 36 . Supongamos que existe un cuarto eje, w , perpendicular a todos y cada uno de ellos. No podemos, manteniendo los tres ejes, x , y , z , representar w en nuestro espacio; pero si renunciamos a uno de nuestros tres ejes podemos dejar que el cuarto eje ocupe su lugar, y podemos representar lo que hay en el espacio, determinado por los dos ejes que conservamos y el cuarto eje.

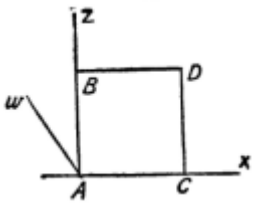


Figura 37.

Supongamos que dejamos caer el eje y y que representamos el eje w ocupando su dirección. Tenemos en la fig. 37 un dibujo de lo que deberíamos ver entonces del cubo. El cuadrado ABCD permanece sin cambios, ya que está en el plano de xz , y todavía tenemos ese plano. Pero desde este plano el cubo se extiende en la dirección del eje y . Ahora el eje y ha desaparecido, por lo que no tenemos más cubo que la cara ABCD . Considerando ahora esta cara ABCD , vemos que es libre de girar alrededor de la recta AB . Puede girar en la dirección x a w alrededor de esta línea. En la Fig. 38 se muestra en su camino, y evidentemente puede continuar esta rotación hasta que se encuentre en el otro lado del eje z en el plano de xz . [Página 68]

También podemos tomar una sección paralela a la cara ABCD , y luego dejando caer todo nuestro espacio excepto el plano de esa sección, introducimos el eje w , corriendo en la antigua dirección y . Esta sección se puede representar mediante el mismo dibujo, fig. 38 , y vemos que puede girar alrededor de la línea de su izquierda hasta que gira hasta la mitad y corre en la dirección opuesta a la que había tomado antes. Estos giros de las

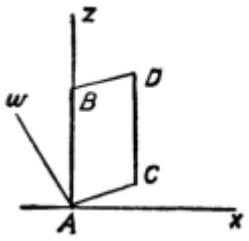


Figura 38.

diferentes secciones no son inconsistentes, y en conjunto sacarán el cubo de la posición que se muestra en la fig. 36 al que se muestra en la fig. 41 .

Como tenemos tres ejes a nuestra disposición en nuestro espacio, no estamos obligados a representar el eje *w* por ninguno en particular. Podemos dejar desaparecer cualquier eje que queramos y dejar que el cuarto eje ocupe su lugar.

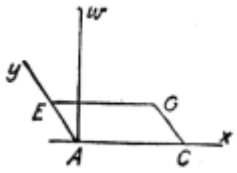


Figura 39.

En la Fig. 36 supongamos que el eje *z* va. tenemos entonces simplemente el plano de *xy* y la base cuadrada del cubo ACEG , fig. 39 , es todo lo que se pudo ver de él. Dejemos ahora que el eje *w* tome el lugar del eje *z* y tenemos, en la fig. 39 nuevamente, una representación del espacio de *xyw* , en el que todo lo que existe del cubo es su base cuadrada. Ahora, mediante un giro de *x* a *w* , esta base puede girar alrededor de la línea AE , como se muestra en la fig. 40 y finalmente, después de media revolución, quedará al otro lado del eje *y* . De manera similar podemos rotar secciones paralelas a la base de la rotación *xw* , y cada una de ellas pasa a correr en dirección opuesta a la que ocupaban al principio.

[Página 69]

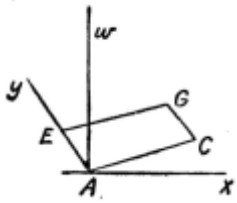


Figura 40.

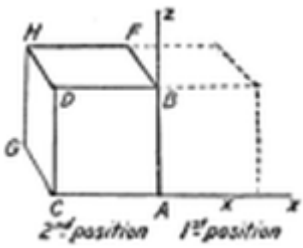


Figura 41.

Así, nuevamente, el cubo proviene de la posición de la fig. 36 . al de la fig. 41 . En este giro de *x* a *w* , vemos que se produce por las rotaciones de tramos paralelos a la cara frontal alrededor de líneas paralelas a AB , o bien podemos considerarlo como consistente en la rotación de tramos paralelos a la base alrededor de líneas paralelas a AE . Es una rotación de todo el cubo alrededor del plano ABEF . Dos secciones separadas no podrían girar alrededor de dos líneas separadas en nuestro espacio sin entrar en conflicto, pero su movimiento es consistente cuando consideramos otra dimensión. Entonces, así como un ser plano puede pensar en la rotación alrededor de una línea como una rotación alrededor de un número de puntos, y estas rotaciones no interfieren como lo harían si tuvieran lugar en su espacio bidimensional, así podemos pensar en una rotación alrededor de a plano como la rotación de varias secciones de un cuerpo alrededor de varias líneas en un plano, no siendo estas rotaciones inconsistentes en un espacio de cuatro dimensiones como lo son en un espacio de tres dimensiones.

[Página 70]

No estamos limitados a ninguna dirección particular para las líneas en el plano alrededor del cual suponemos que tiene lugar la rotación de las secciones particulares. Dibujemos la sección del cubo, fig. 36 , pasando por A , F , C , H , formando un plano inclinado. Ahora bien, dado que la cuarta dimensión está en ángulo recto con cada línea en nuestro espacio, también está en ángulo recto con esta sección. Podemos representar nuestro espacio dibujando un eje perpendicular al plano ACEG , nuestro espacio entonces está determinado por el plano ACEG y el eje perpendicular. Si dejamos caer este eje y suponemos que el cuarto eje, *w* , ocupa su lugar, tenemos una representación del espacio que se extiende en la cuarta dimensión desde el plano ACEG . En este espacio veremos simplemente la sección ACEG del cubo, y nada más, pues un cubo no se extiende a ninguna distancia en la cuarta dimensión.

Si, manteniendo este plano, introducimos la cuarta dimensión, tendremos un espacio en el que simplemente existe esta sección del cubo y nada más. La sección puede girar

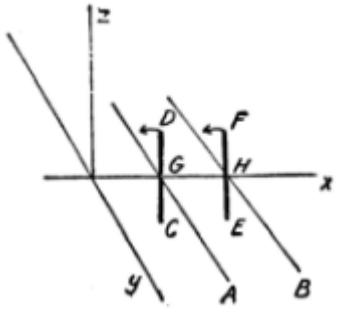


Figura 42.

alrededor de la línea AF y las secciones paralelas pueden girar alrededor de líneas paralelas. Así, al considerar la rotación alrededor de un plano, podemos dibujar cualquier línea que queramos y considerar que la rotación tiene lugar en secciones alrededor de ellas.

Para resaltar este punto más claramente, tomemos dos líneas paralelas, A y B , en el espacio de *xyz* , y seamos CD y EF dos barras que corren por encima y por debajo del plano de *xy* , desde estas líneas. Si nosotros Gire estas varillas en nuestro [Página 71] espacio alrededor de las líneas A y B , a medida que el extremo superior de una, F , baja, el extremo inferior de la otra, C , subirá. Se encontrarán y entrarán en conflicto. Pero es muy posible que estas dos varillas giren cada una de ellas alrededor de las dos líneas sin alterar sus distancias relativas.

Para ver esto, supongamos que el eje *y* se mueve y dejamos que el eje *w* ocupe su lugar. Ya no veremos las líneas A y B , porque corren en la dirección *y* desde los puntos G y H.

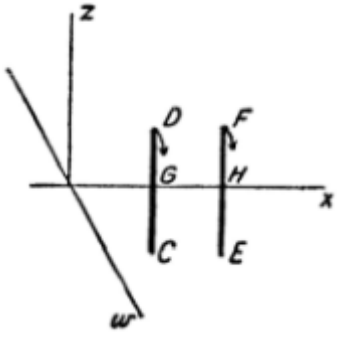


Figura 43.

La Fig. 43 es una imagen de las dos varillas vistas en el espacio de *xzw* . Si giran en la dirección que muestran las flechas (en la dirección *z* a *w)* , se mueven paralelos entre sí, manteniendo sus distancias relativas. Cada uno girará alrededor de su propia línea, pero su rotación no será inconsistente con el hecho de que formen parte de un cuerpo rígido.

Ahora sólo tenemos que suponer un plano central con varillas que lo cruzan en cada punto, como CD y EF cruzan el plano de *xy* , para tener una imagen de una masa de materia que se extiende distancias iguales a cada lado de un plano diametral. Así como dos de estas varillas pueden girar, también pueden hacerlo todas, y toda la masa de materia puede girar alrededor de su plano diametral.

Esta rotación alrededor de un plano corresponde, en cuatro dimensiones, a la rotación alrededor de un eje en tres dimensiones. La rotación de un cuerpo alrededor de un plano es análoga a la rotación de una varilla alrededor de un eje.

En un plano tenemos rotación alrededor de un punto, en rotación en tres espacios alrededor de una línea de eje, en rotación en cuatro espacios alrededor de un plano de eje.

El eje del ser de cuatro dimensiones mediante el cual transmite energía es un disco que gira alrededor de su centro. plano: todo el contorno corresponde a los extremos de un eje [Página 72] de rotación en nuestro espacio. Puede impartir la rotación en cualquier punto y interrumpirla en cualquier otro punto del contorno, del mismo modo que la rotación alrededor de una línea puede impartirse en tres espacios en un extremo de una varilla y interrumpirse en el otro extremo.

Una rueda de cuatro dimensiones se puede describir fácilmente mediante la analogía de la representación que un ser plano se haría de una de nuestras ruedas.

Supongamos que una rueda se mueve transversalmente a un plano, de modo que todo el disco, que consideraré sólido y sin radios, entre al mismo tiempo en contacto con el plano. Aparecería como una porción circular de materia plana que encierra completamente otra porción más pequeña: el eje.

Esta apariencia duraría, suponiendo que el movimiento de la rueda continuara hasta que hubiera atravesado el plano en la medida de su espesor, cuando quedaría en el plano sólo el pequeño disco que es la sección del eje. Al principio, no habría ningún medio obvio en el plano por el cual se pudiera alcanzar el eje, excepto atravesando la sustancia de la rueda. Pero la posibilidad de alcanzarlo sin destruir la sustancia de la rueda quedaría demostrada por la permanencia de la sección del eje después de que la de la rueda hubiera desaparecido.

De manera similar, una rueda de cuatro dimensiones que se moviera transversalmente a nuestro espacio aparecería primero como una esfera sólida, rodeando completamente a una esfera sólida más pequeña. La esfera exterior representaría la rueda y duraría hasta que la rueda haya recorrido nuestro espacio una distancia igual a su espesor. Entonces solo quedaría la pequeña esfera, que representa la sección del eje. La esfera grande podía moverse libremente alrededor de la pequeña. Cualquier línea en el espacio podía tomarse como eje, y alrededor de esta línea la esfera exterior podía girar, mientras que la esfera interior permanecía quieta. Pero en todas estas direcciones de revolución habría en realidad una línea que permanecería inalterada, es decir, la línea que se extiende en la cuarta dirección, formando el eje del eje. La rueda de cuatro dimensiones puede girar en cualquier número de planos, pero todos estos planos son tales que hay una línea en ángulo recto con ellos que no se ve afectada por la rotación en ellos. [Página 73]

A veces se experimenta una objeción en cuanto a este modo de razonar desde un mundo plano a una dimensionalidad superior. Se argumenta que cuán artificial es esta concepción de un mundo plano. Si se pudiera demostrar que existe cualquier existencia real confinada a una superficie, habría un argumento a favor de una con respecto a la cual nuestra existencia tridimensional es superficial. Pero, tanto de un lado como del otro del espacio que conocemos, los espacios con menos o más de tres dimensiones son meras concepciones arbitrarias.

En respuesta a esto, quisiera señalar que un plano que tuviera una dimensión menos que las tres nuestras tendría un tercio de nuestras posibilidades de movimiento, mientras que nosotros sólo tenemos un cuarto menos que las del espacio superior. Es muy posible que haya una cierta cantidad de libertad de movimiento que se exige como condición de una existencia organizada, y que ninguna existencia material sea posible con una dimensionalidad más limitada que la nuestra. Esto se ve bien si intentamos construir la mecánica de un mundo bidimensional. No podría existir ningún tubo, pues a menos que estuvieran completamente unidos en un extremo, dos líneas paralelas estarían completamente separadas. La posibilidad de una estructura orgánica, sujeta a condiciones como ésta, es muy problemática; sin embargo, es posible que en las circunvoluciones del cerebro exista un modo de existencia que pueda describirse como bidimensional.

No tenemos más que suponer que el aumento de superficie y la disminución de masa se prolongan hasta cierto punto para encontrar una región que, aunque sin movilidad del componentes, tendrían que describirse como bidimensionales. [Página 74]

Pero, por muy artificial que pueda ser la concepción de un ser plano, no deja de ser utilizada para pasar a la concepción de una dimensionalidad mayor que la nuestra y, por tanto, la validez de la primera parte de esta objeción desaparece por completo tan pronto como encontramos evidencia. para tal estado de ser.

La segunda parte de la objeción tiene más peso. ¿Cómo es posible concebir que en un espacio de cuatro dimensiones cualquier criatura deba estar confinada a una existencia tridimensional?

En respuesta, diría que sabemos de hecho que la vida es esencialmente un fenómeno superficial. La amplitud de los movimientos que podemos realizar es mucho mayor a lo largo de la superficie de la tierra que hacia arriba o hacia abajo.

Ahora bien, no tenemos más que concebir que la extensión de una superficie sólida aumenta, mientras que los posibles movimientos transversales a ella disminuyen en la

misma proporción, para obtener la imagen de un mundo tridimensional en un espacio cuatridimensional.

Y así como nuestro hábitat es el encuentro del aire y la tierra en el mundo, debemos pensar que el lugar de encuentro de dos proporciona las condiciones para nuestro universo. ¿El encuentro de qué dos? ¿Qué puede ser esa inmensidad en el espacio superior que se extiende en un nivel tan perfecto que nuestras observaciones astronómicas no logran detectar la más mínima curvatura?

La perfección del nivel sugiere un líquido (¡un lago en medio de qué vasto paisaje!) sobre el cual la materia del universo flota como una mota.

Pero este aspecto del problema es como lo que en matemáticas se llama condiciones de frontera.

Podemos rastrear todas las consecuencias de los movimientos cuatridimensionales hasta el último detalle. Entonces, sabiendo el modo de acción que sería característico de las partículas más diminutas, si fueran libres, podemos sacar conclusiones de lo que realmente hacen sobre cuál es la restricción que se les impone. De las dos cosas, las condiciones materiales y el movimiento, una se conoce y la otra se puede inferir. Si el lugar de este universo es el encuentro de dos, habría una unicidad en el espacio. Si es así que lo que se extiende en una dirección en lo desconocido es diferente de lo que se extiende en la otra, entonces, en lo que respecta a los movimientos que participan en esa dimensión, habría una diferencia en cuanto a la dirección que tomó el movimiento. lugar. Esto se mostraría en la diferencia de fenómenos que, en lo que respecta a todos los movimientos tridimensionales, eran perfectamente simétricos. Tomemos un ejemplo, simplemente, para precisar nuestras ideas, no por ninguna probabilidad inherente a él; Si se pudiera demostrar que la corriente eléctrica en la dirección positiva era exactamente igual a la corriente eléctrica en la dirección negativa, excepto por una inversión de los componentes del movimiento en el espacio tridimensional, entonces la diferencia entre las descargas de las direcciones positiva y Los polos negativos serían una indicación de unilateralidad de nuestro espacio. La única causa de diferencia en las dos descargas se debería a un componente en la cuarta dimensión, que dirigido en una dirección transversal a nuestro espacio, encontró una resistencia diferente a la que encontró cuando se dirigió en la dirección opuesta. [Página 75]

CAPÍTULO VII

LAS PRUEBAS DE UNA CUARTA DIMENSIÓN

[Página 76]

El método que necesariamente debe emplearse en la búsqueda de las evidencias de una cuarta dimensión consiste principalmente en la formación de concepciones de formas y movimientos cuatridimensionales. Cuando los poseemos, es posible recurrir a la ayuda de la observación; sin ellos, podríamos haber estado toda nuestra vida en la presencia familiar de un fenómeno de cuatro dimensiones sin reconocer jamás su naturaleza.

Para tomar una de las concepciones que ya nos hemos formado, la transformación de una cosa real en su imagen especular sería un hecho que sería difícil de explicar, excepto bajo el supuesto de una cuarta dimensión.

No conocemos tal giro. Pero existe una multitud de formas que muestran una cierta relación con un plano, una relación de simetría, que indica más que una yuxtaposición accidental de partes. En la vida orgánica el tipo universal es de simetría diestra y zurda, hay un plano a cada lado del cual se corresponden las partes. Ahora hemos visto que en cuatro dimensiones un plano reemplaza a una línea en tres dimensiones. En nuestro espacio, la rotación alrededor de un eje es el tipo de rotación, y el origen de los cuerpos simétricos respecto a una línea, como la Tierra es simétrica respecto a un eje, se puede explicar fácilmente. Pero donde hay simetría alrededor de un plano, no hay movimiento físico simple, como el que vemos. estamos acostumbrados, basta con explicarlo. En [Página 77] nuestro espacio, un objeto simétrico debe construirse mediante adiciones iguales a cada lado de un plano central. Tales adiciones sobre dicho plano son tan poco probables como cualquier otro incremento. La probabilidad contra la existencia de formas simétricas en la naturaleza inorgánica es abrumadora en nuestro espacio, y en formas orgánicas serían tan difíciles de producir como cualquier otra variedad de configuración. Para ilustrar este punto podemos tomar como ejemplo la diversión del niño al hacer, con puntos de tinta sobre un trozo de papel, una representación realista de un insecto simplemente doblando el papel. Los puntos se extienden sobre una línea simétrica y dan la impresión de una forma segmentada con antenas y patas.

Ahora bien, al ver una serie de figuras de este tipo, naturalmente deberíamos inferir un plegado. ¿Puede, entonces, un plegado en un espacio de cuatro dimensiones explicar la simetría de las formas orgánicas? Por supuesto, el plegamiento no puede ser de los cuerpos que vemos, pero puede ser de esos diminutos constituyentes, los elementos últimos de la materia viva que, girados de una forma u otra, se vuelven diestros o zurdos, y así producen una correspondiente. estructura.

Hay algo en la vida que no está incluido en nuestras concepciones del movimiento mecánico. ¿Es esto algo un movimiento de cuatro dimensiones?

Si lo miramos desde el punto de vista más amplio, hay algo sorprendente en el hecho de que donde entra la vida surge un conjunto de fenómenos completamente diferente a los del mundo inorgánico.

Los intereses y valores de la vida tal como los conocemos en nosotros mismos, tal como los conocemos existiendo a nuestro alrededor en formas subordinadas, son total y completamente diferentes a cualquier cosa que muestre la naturaleza inorgánica. Y en los seres vivos tenemos una especie de forma, una disposición de la materia que es enteramente diferente de la que se muestra en la materia inorgánica. La simetría de [Página 78] derechas y de izquierdas no ocurre en las configuraciones de la materia muerta. Tenemos casos de simetría con respecto a un eje, pero no con respecto a un plano. Se puede argumentar que la aparición de simetría en dos dimensiones implica la existencia de un proceso tridimensional, como cuando una piedra cae al agua y forma anillos de ondas, o como cuando una masa de material blando gira alrededor de un eje. Se puede argumentar que la simetría en cualquier número de dimensiones es evidencia de una acción en una dimensionalidad superior. Así, considerando los seres vivos, tanto en su estructura como

en sus diferentes modos de actividad, hay evidencia de algo que viene del exterior al mundo inorgánico.

Y las objeciones que surgirán fácilmente, como las derivadas de las formas de los cristales gemelos y de la estructura teórica de las moléculas químicas, no invalidan el argumento; porque también en estas formas la sede presumible de la actividad que las produce se encuentra en esa diminuta región en la que necesariamente ubicamos la sede de una movilidad cuatridimensional.

En otro aspecto también es destacable la existencia de formas simétricas. Es desconcertante concebir cómo pueden existir dos formas exactamente iguales que no sean superposibles. Un par de figuras simétricas como las dos manos, derecha e izquierda, muestran o una limitación en nuestro poder de movimiento, por la cual no podemos superponer la una a la otra, o una clara influencia y compulsión del espacio sobre la materia, infligiendo limitaciones que son adicionales a las de las proporciones de las partes.

Sin embargo, dejaremos de lado los argumentos que se derivan de la consideración de la simetría como no concluyentes, conservando una valiosa indicación que nos ofrecen. Si la simetría existe en virtud del movimiento cuatridimensional, ese movimiento sólo puede encontrarse en las diminutas partículas de los cuerpos, porque hay No existe nada parecido a la flexión en cuatro dimensiones de cualquier objeto de un tamaño que podamos observar. La región de lo extremadamente diminuto es, pues, la que tendremos que investigar. Debemos buscar algún fenómeno que, aunque ocasione movimientos del tipo que conocemos, sea en sí mismo inexplicable como cualquier forma de movimiento que conocemos. [Página 79]

Ahora bien, en las teorías de las acciones de las diminutas partículas de los cuerpos entre sí y en los movimientos del éter, los matemáticos han supuesto tácitamente que los principios mecánicos son los mismos que prevalecen en el caso de los cuerpos observables. Se ha supuesto, sin pruebas, que la concepción del movimiento, siendo tridimensional, se mantiene más allá de la región a partir de las observaciones en las que se formó.

Por tanto, no es de ningún fenómeno explicado por las matemáticas de donde podemos derivar una prueba de cuatro dimensiones. Todo fenómeno que se ha explicado se explica como tridimensional. Y, además, como en la región del minuto no encontramos cuerpos rígidos que actúan unos sobre otros a distancia, sino sustancias elásticas y fluidos continuos como el éter, tendremos una doble tarea.

Debemos formarnos concepciones de los posibles movimientos de la materia tetradimensional elástica y líquida, antes de que podamos comenzar a observar. Tomemos, por tanto, la rotación tetradimensional alrededor de un plano e investiguemos en qué se convierte en el caso de sustancias fluidas extensibles. Si existen movimientos cuatridimensionales, este tipo de rotación debe existir, y las porciones más finas de la materia deben exhibirla.

Consideremos por un momento una varilla de material flexible y extensible. Puede girar alrededor de un eje, aunque no sea recto; un anillo de caucho indio puede volverse del revés.

¿Qué sería esto en el caso de cuatro dimensiones?

Consideremos una esfera de nuestra materia tridimensional que tiene un espesor definido. Para representar este espesor supongamos que desde cada punto de la esfera de la fig. 44 varillas se proyectan en ambos sentidos, hacia adentro y hacia afuera, como D y F. Sólo podemos ver la parte externa, porque las partes internas están ocultas por la esfera. [Pág. 80]

En esta esfera el eje *x* debe acercarse al observador, el eje *z* debe ir hacia arriba y el eje *y* debe ir hacia la derecha.

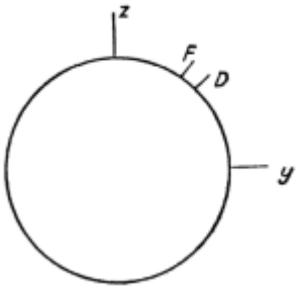


Fig. 44.
Eje de x que corre hacia el observador.

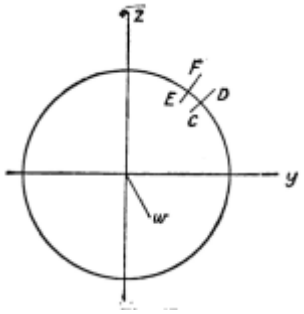


Figura 45.

Ahora toma la sección determinada por el plano *zy* . Este será un círculo como se muestra en la fig. 45 . Si dejamos caer el eje *x* , este círculo es todo lo que tenemos de la esfera. Dejando que el eje *w* corra ahora en lugar del antiguo eje *x* tenemos el espacio *yzw* , y en este espacio todo lo que tenemos de la esfera es el círculo. La Fig. 45 representa entonces todo lo que hay de la esfera en el espacio de *yzw* . En este espacio es evidente que las varillas CD y EF pueden girar alrededor de la circunferencia como eje. Si la materia de la capa esférica es lo suficientemente extensible como para permitir que las partículas C y E queden tan separadas como lo estarían en las posiciones D y F , entonces la franja de materia representada por CD y EF y una multitud de varillas como ellas pueden girar alrededor de la circunferencia circular.

[Página 81]

Así, esta sección particular de la esfera puede volverse del revés, y lo que es válido para cualquier sección es válido para todas. Por lo tanto, en cuatro dimensiones, toda la esfera, si es extensible, puede girarse del revés. Además, cualquier parte de él (una porción en forma de cuenco, por ejemplo) puede girarse del revés, y así sucesivamente, dando vueltas y vueltas.

En realidad, esto no es más que lo que teníamos antes en la rotación alrededor de un plano, excepto que vemos que el plano puede, en el caso de la materia extensible, ser curvo y seguir desempeñando el papel de un eje.

Si suponemos que la capa esférica es de materia de cuatro dimensiones, nuestra representación será un poco diferente. Supongamos que hay un pequeño espesor de materia en la cuarta dimensión. Esto no haría ninguna diferencia en la fig. 44 , porque eso simplemente muestra la vista en el espacio *xyz* . Pero cuando se deja caer el eje *x* y entra el eje *w , entonces las varillas* CD y EF que representan la materia de la concha tendrán un cierto espesor perpendicular al plano del papel sobre el que están dibujadas. Si tienen un espesor en la cuarta dimensión, mostrarán este espesor cuando se miren desde la dirección del eje *w* .

Suponiendo, entonces, que estas varillas sean pequeñas losas ensartadas en la circunferencia del círculo de la fig. 45 , vemos que tampoco en este caso habrá ningún obstáculo para que giren alrededor de la circunferencia. Podemos tener una coraza de material extensible o de material fluido girando del revés en cuatro dimensiones.

Y debemos recordar que en cuatro dimensiones no existe la rotación alrededor de un eje. Si queremos investigar el movimiento de fluidos en cuatro dimensiones debemos tomar un movimiento alrededor de un eje en nuestro espacio, y Encuentre el movimiento correspondiente alrededor de un plano en cuatro espacios.

[Página 82]

Ahora bien, de todos los movimientos que tienen lugar en los fluidos, el más importante desde el punto de vista físico es el movimiento de vórtice.

Un vórtice es un remolino o remolino; se muestra en las coronas de polvo giratorias que se ven en un día de verano; se exhibe a mayor escala en la marcha destructiva de un ciclón.

Una rueda que gira arrojará el agua sobre ella. Pero cuando este movimiento circular tiene lugar en el propio líquido, es extrañamente persistente. Por supuesto, existe una cierta cohesión entre las partículas de agua que impiden mutuamente sus movimientos. Pero en un líquido sin fricción, de modo que cada partícula está libre de cohesión lateral en su trayectoria de movimiento, se puede demostrar que un vórtice o remolino separa de la masa del fluido una determinada porción, que siempre permanece en ese vórtice.

La forma del vórtice puede variar, pero siempre está formado por las mismas partículas de fluido.

Ahora bien, un hecho muy notable acerca de tal vórtice es que los extremos del vórtice no pueden permanecer suspendidos y aislados en el fluido. Siempre deben llegar hasta el límite del fluido. Un remolino en el agua que permanece a mitad de camino sin llegar a la cima es imposible.

Los extremos de un vórtice deben alcanzar el límite de un fluido (el límite puede ser externo o interno); puede existir un vórtice entre dos objetos en el fluido, terminando un extremo en cada objeto, siendo los objetos los límites internos del fluido. De nuevo, un vórtice puede tener sus extremos unidos entre sí, de modo que forme un anillo. Los anillos de vórtice circulares de esta descripción se ven a menudo en forma de bocanadas de humo, y el hecho de que el humo se desplace dentro del anillo es una prueba de que el vórtice siempre está formado por las mismas partículas de aire.

Preguntemos ahora qué sería un vórtice en un fluido de cuatro dimensiones. [Página 83]

Debemos sustituir el eje lineal por un eje plano. Por tanto, deberíamos tener una porción de fluido girando alrededor de un plano.

Hemos visto que el contorno de este plano se corresponde con los extremos de la línea del eje. Por lo tanto, un vórtice de cuatro dimensiones debe tener su borde en una frontera del fluido. Habría una región de vorticidad con un contorno. Si tal rotación se iniciara en una parte de un límite circular, sus bordes rodearían el límite en ambas direcciones hasta que toda la región interior se llenara con la lámina de vórtice.

Un vórtice en un líquido tridimensional puede consistir en varios filamentos de vórtice que se encuentran juntos produciendo un tubo o varilla de vorticidad.

De la misma manera, podemos tener en cuatro dimensiones varias láminas de vórtice unas junto a otras, cada una de las cuales puede considerarse como una porción en forma de cuenco de una cáscara esférica que se da vuelta del revés. La rotación tiene lugar en cualquier punto, no en el espacio ocupado por el caparazón, sino desde ese espacio hasta la cuarta dimensión y regresando nuevamente.

¿Hay algo análogo a esto dentro del alcance de nuestra observación?

Una corriente eléctrica responde a esta descripción en todos los aspectos. La electricidad no fluye a través de un cable. Su efecto viaja en ambos sentidos desde el punto inicial a lo largo del cable. La chispa que muestra su paso por la mitad de su circuito es posterior a la que ocurre en puntos cercanos a su punto de partida a ambos lados del mismo.

Además, se sabe que la acción de la corriente no se produce en el cable. Es en la región encerrada por el alambre, este es el campo de fuerza, el lugar de exposición de los efectos de la corriente.

Y la necesidad de un circuito conductor para una corriente es exactamente lo que deberíamos esperar si fuera un vórtice de cuatro dimensiones. Según Maxwell toda corriente forma un circuito cerrado, y esto, desde el punto de vista cuatridimensional, es lo mismo que decir que un vórtice debe tener sus extremos en una frontera del fluido. [Página 84]

Así, según la hipótesis de una cuarta dimensión, la rotación del éter fluido daría el fenómeno de una corriente eléctrica. Debemos suponer que el éter está lleno de

movimiento, porque cuanto más examinamos las condiciones que prevalecen en la oscuridad del minuto, más encontramos que reina un movimiento incesante y perpetuo. Así podemos decir que la concepción de la cuarta dimensión significa que debe existir un fenómeno que presente las características de la electricidad.

Ahora sabemos que la luz es una acción electromagnética y que, lejos de ser un fenómeno especial y aislado, esta acción eléctrica es universal en el ámbito del minuto. Por lo tanto, ¿no podemos concluir que, lejos de ser remota y lejana, de ser una cosa de importancia simbólica, un término para la explicación de hechos dudosos mediante una teoría más oscura, es realmente el hecho más importante dentro de nuestro conocimiento? conocimiento. Nuestro mundo tridimensional es superficial. Estos procesos, que realmente se encuentran en la base de todos los fenómenos de la materia, escapan a nuestra observación por su minuciosidad, pero revelan a nuestro intelecto una amplitud de movimiento que sobrepasa cualquier movimiento que podamos ver. En tales formas y movimientos hay un reino de la máxima belleza intelectual, y uno al que nuestros métodos simbólicos se aplican con mejor gracia que a los de tres dimensiones.

CAPITULO VIII

[Página 85]

EL USO DE LAS CUATRO DIMENSIONES EN EL PENSAMIENTO

Habiendo tenido ante nosotros este esbozo de una conjetura del mundo como cuatridimensional, habiendo reunido a grandes rasgos aquellos hechos de movimiento que podemos ver aplicables a nuestra experiencia real, pasemos a otra rama de nuestro tema.

El ingeniero utiliza dibujos, construcciones gráficas, de diversas maneras. Tiene, por ejemplo, diagramas que representan la expansión del vapor y la eficiencia de sus válvulas. Estos existen junto con los planos reales de sus máquinas. No son imágenes de nada que exista realmente, pero le permiten pensar en las relaciones que existen en sus mecanismos.

Y así, además de mostrarnos la existencia real de ese mundo que se encuentra debajo del de los movimientos visibles, el espacio de cuatro dimensiones nos permite hacer construcciones ideales que sirven para representar las relaciones de las cosas y arrojar lo que de otro modo sería oscuro a un lugar definido. y forma sugerente.

De entre la gran variedad de ejemplos que tengo ante mí seleccionaré dos, uno que trata de un tema de escaso interés intrínseco, que sin embargo ofrece, dentro de un campo limitado, un ejemplo sorprendente del método de sacar conclusiones y el uso de cifras [Página 86] espaciales superiores. [1]

[1] Es sugerente también en otro aspecto, porque muestra muy claramente que en nuestros procesos de pensamiento están en juego facultades distintas de las lógicas; en él el origen de la idea que se muestra justificada se extrae de la consideración de la simetría, una rama de lo bello.

El otro ejemplo se elige debido a la relación que tiene con nuestras concepciones fundamentales. En él intento descubrir el significado real de la teoría de la experiencia de Kant.

La investigación de las propiedades de los números se ve mucho más facilitada por el hecho de que las relaciones entre números pueden representarse como números; *por ejemplo* , 12 y 3 son ambos números, y la relación entre ellos es 4, otro número. Se abre así el camino a un proceso de teoría constructiva, sin que sea necesario recurrir a otra clase de conceptos además de los que están dados en los fenómenos a estudiar.

La disciplina del número así creada es de gran y variada aplicabilidad, pero no es únicamente cuantitativa como aprendemos a comprender los fenómenos de la naturaleza. No es posible explicar simplemente las propiedades de la materia mediante números, pero todas las actividades de la materia son energías en el espacio. Son numéricamente definidas y también, podemos decir, dirigidamente definidas, *es decir,* definidas en dirección.

¿Existe, entonces, un cuerpo de doctrina sobre el espacio que, como el del número, esté disponible en la ciencia? No hace falta responder: Sí; geometría. Pero hay un método paralelo a los métodos ordinarios de la geometría, que, utilizado tácitamente y presentando una analogía con el método del pensamiento numérico, merece que se le dé mayor importancia de la que suele ocupar.

La relación de números es un número.

¿Podemos decir de la misma manera que la relación de formas es una forma?

Podemos.

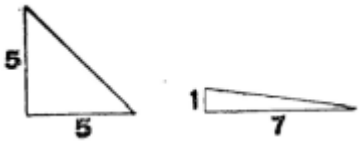


Figura 46.

Tomar una instancia elegida por su fácil disponibilidad. Tomemos dos triángulos rectángulos de una hipotenusa dada, pero con lados de diferentes longitudes (figura 46). Estos triángulos son formas que tienen cierta relación entre sí. Expongamos su relación como una figura. [Página 87]

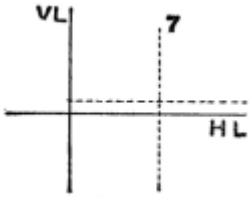


Figura 47.

Dibuje dos líneas rectas en ángulo recto entre sí, una HL a un nivel horizontal y la otra VL a un nivel vertical (fig. 47). Por medio de estas dos líneas coordinantes podemos representar un doble conjunto de magnitudes; uno establecido como distancias a la derecha del nivel vertical, el otro como distancias por encima del nivel horizontal, eligiéndose una unidad adecuada.

Así, la línea marcada con 7 seleccionará el conjunto de puntos cuya distancia al nivel vertical es 7, y la línea marcada con 1 seleccionará los puntos cuya distancia sobre el nivel horizontal es 1. El punto de encuentro de estas dos líneas, 7 y 1, definirá un punto que respecto a un conjunto de magnitudes es 7, respecto al otro es 1. Tomemos los lados de nuestros triángulos como los dos conjuntos de magnitudes en cuestión.

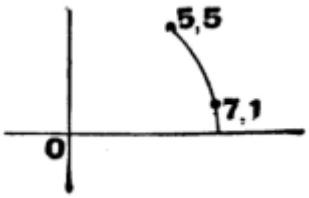


Figura 48.

Entonces el punto 7, 1, representará el triángulo cuyos lados son 7 y 1. De manera similar, el punto 5, 5—5, es decir, a la derecha del nivel vertical y 5 sobre el nivel horizontal—representará el triángulo cuyos lados son 5 y 5 (fig. 48).

Así hemos obtenido una figura formada por los dos puntos 7, 1 y 5, 5, representativos de nuestros dos triángulos. Pero podemos ir más allá y trazar un arco. de un círculo alrededor de O , punto de encuentro de los niveles horizontal y vertical, que pasa por 7, 1 y 5, 5, afirman que todos los triángulos rectángulos que tienen una hipotenusa cuyo cuadrado es 50 están representados por la puntos de este arco. [Pág. 88]

Así, estando representado cada individuo de una clase por un punto, toda la clase está representada por un conjunto de puntos que forman una figura. Aceptando esta representación podemos atribuir un significado definido y calculable a la expresión, semejanza o similitud entre dos individuos de la clase representada, midiendo la diferencia por la longitud de la línea entre dos puntos representativos. No es necesario multiplicar ejemplos, ni mostrar cómo, correspondientes a diferentes clases de triángulos, obtenemos curvas diferentes.

Una representación de este tipo en la que un objeto, una cosa en el espacio, se representa como un punto, y se omiten todas sus propiedades, quedando su efecto sólo en la posición relativa que el punto representativo tiene con respecto a los puntos representativos de los demás objetos. , puede denominarse, siguiendo la analogía de la hodógrafa de Sir William R. Hamilton, una "poiografía".

Las representaciones así realizadas tienen el carácter de objetos naturales; tienen un carácter determinado y definido propio. Cualquier falta de exhaustividad en ellos se debe probablemente a una falta de exhaustividad de aquellas observaciones que forman la base de su construcción.

Todo sistema de clasificación es un poiógrafo. En el esquema de los elementos de Mendeléeff, por ejemplo, cada elemento está representado por un punto, y las relaciones entre los elementos están representadas por las relaciones entre los puntos.

Hasta ahora simplemente he resaltado procesos y consideraciones que todos conocemos. Pero Vale la pena sacar a la luz de nuestra atención nuestras suposiciones y procesos habituales. Sucede a menudo que hay dos de ellos que se influyen mutuamente y que, sin que esto los sacara a la luz, deberíamos haber dejado que permanecieran sin influencia mutua. [Pág. 89]

Hay un hecho que nos conviene tener en cuenta al discutir la teoría del poiógrafo.

Con respecto a nuestro conocimiento del mundo, estamos lejos de la condición que imaginó Laplace cuando afirmó que una mente omnisciente podría determinar la condición futura de cada objeto, si conociera las coordenadas de sus partículas en el espacio y sus coordenadas. velocidad en cualquier momento particular.

Por el contrario, en presencia de cualquier objeto natural, tenemos ante nosotros una gran complejidad de condiciones que no podemos reducir a posición en el espacio y fecha en el tiempo.

Hay masa, atracción aparentemente espontánea, propiedades eléctricas y magnéticas que deben añadirse a la configuración espacial. Para abreviar la lista debemos decir que prácticamente los fenómenos del mundo nos presentan problemas que involucran muchas variables, que debemos tomar como independientes.

De esto se deduce que al hacer poiografías debemos estar preparados para utilizar un espacio de más de tres dimensiones. Si la simetría y la integridad de nuestra representación han de sernos útiles, debemos estar preparados para apreciar y criticar figuras de una complejidad mayor que las de tres dimensiones. Es imposible dar un ejemplo de tal poiografía que no sea meramente trivial, sin entrar en detalles de algún tipo irrelevantes para nuestro tema. Prefiero introducir los detalles irrelevantes en lugar de tratar esta parte del tema de manera superficial.

Tomemos como ejemplo un poiógrafo que no conduce Para adentrarnos en las complejidades inherentes a su aplicación en la ciencia clasificatoria, sigamos a la señora Alicia Boole Stott en su representación del silogismo por sus medios. Le interesará descubrir que la curiosa brecha que detectó tiene un significado. [Página 90]

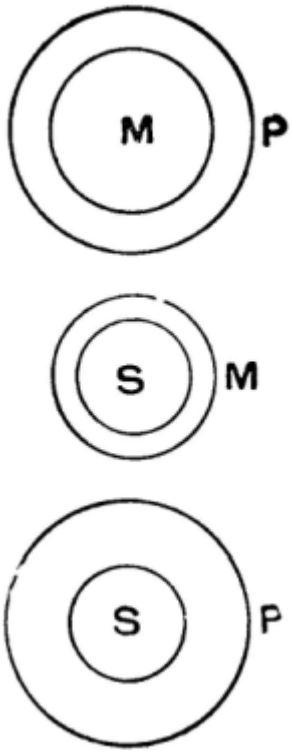


Figura 49.

Un silogismo consta de dos enunciados, la premisa mayor y la premisa menor, con la conclusión que se puede extraer de ellas. Así, por ejemplo, la fig. 49 . Es evidente, al observar las figuras sucesivas, que, si sabemos que la región M se encuentra completamente dentro de la región P , y también sabemos que la región S se encuentra completamente dentro de la región M , podemos concluir que la región S se encuentra completamente dentro de la región P. M es P , premisa mayor; S es M , premisa menor; S es P , conclusión. Dados los dos primeros datos debemos concluir que S se encuentra en P . La conclusión S es P implica dos términos, S y P , que se llaman respectivamente sujeto y predicado, siendo elegidas las letras S y P con referencia a las partes que desempeñan en la conclusión las nociones que designan. S es el sujeto de la conclusión, P es el predicado de la conclusión. La premisa principal que tomamos es la que no involucra S , y aquí siempre la escribimos primero.

Hay varias variedades de enunciados que poseen diferentes grados de universalidad y formas de asertividad. Estas diferentes formas de enunciado se denominan estados de ánimo.

Tomaremos la premisa mayor como una variable, como algo capaz de diferentes modificaciones del mismo tipo, la premisa menor como otra, y los diferentes estados de ánimo consideraremos que definen las variaciones que sufren estas variables.

Hay cuatro estados de ánimo: - [Página 91]

1. La afirmativa universal; todo M es P , llamado estado de ánimo A.

2. La negativa universal; no M es P , estado de ánimo E.

3. La afirmativa particular; algo DE M es P , estado de ánimo I.

4. La negativa particular; alguna M no es P , estado de ánimo O.

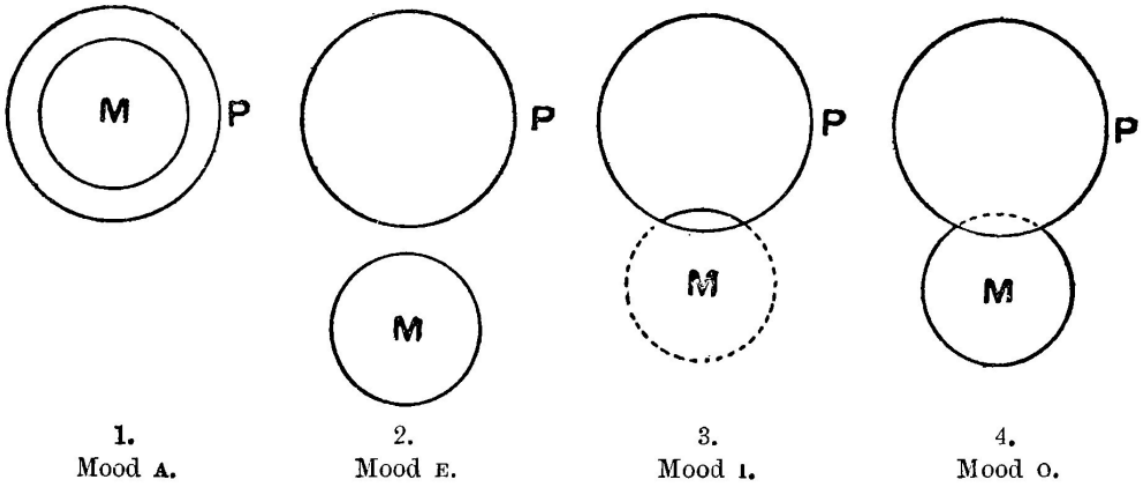


Figura 50.

Las líneas de puntos en 3 y 4, fig. 50 , denotan que no se sabe si existen o no objetos correspondientes al espacio cuya línea de puntos forma un límite delimitador; por lo tanto, en el estado de ánimo I no sabemos si hay M que no sean P , solo sabemos que algunas M son P.

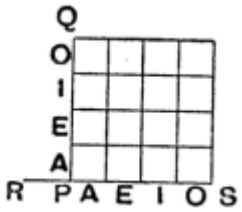


Figura 51.

Representando la primera premisa en sus diversos modos mediante regiones marcadas por líneas verticales a la derecha de PQ , tenemos en la fig. 51 , a partir de las cuatro letras AEIO , cuatro columnas, cada una de las cuales indica que la premisa mayor está en el modo indicado por la letra respectiva. En la primera columna a la derecha de PQ ESTÁ el estado de ánimo A. Ahora, encima de la línea RS , marquemos cuatro regiones correspondientes a los cuatro modos de la premisa menor. Así, en la primera fila encima DE RS, toda la región entre RS y la primera línea horizontal encima denota que la premisa menor está en el modo A. El letras E , I , O , de la misma manera muestran el estado de ánimo que caracteriza la premisa menor en las filas opuestas a estas letras. [Página 92]

Todavía tenemos que exponer la conclusión. Para ello debemos considerar la conclusión como una tercera variable, caracterizada en sus diferentes variedades por cuatro modos: siendo ésta la clasificación silogística. La introducción de una tercera variable supone un cambio en nuestro sistema de representación.

Antes comenzamos con las regiones a la derecha de una determinada línea como representando sucesivamente la premisa principal en sus estados de ánimo; ahora debemos comenzar con las regiones a la derecha de un determinado plano. Sea LMNR la cara plana de un cubo, fig. 52 , y divida el cubo en cuatro partes mediante secciones verticales paralelas a LMNR . La variable, la premisa mayor, está representada por las regiones sucesivas que se encuentran a la derecha del plano LMNR ; la región a la que se encuentra A , esa porción del cubo, es significativa del modo A. Toda esta cuarta parte del cubo representa que para cada parte la premisa mayor está en el modo A.

Figura 52.

De manera similar, la siguiente sección, la segunda con la letra E ENFRENTE , representa que para cada uno de los dieciséis pequeños espacios cúbicos que contiene, la premisa mayor está en el modo E. Los compartimentos tercero y cuarto formados por las secciones verticales denotan la premisa mayor en los estados de ánimo I y O. Pero el cubo se puede dividir de otras formas por otros planos. Dejemos que las divisiones, de las cuales cuatro se extienden desde la cara frontal, correspondan a la premisa menor. La primera pared de dieciséis cubos, de cara al observador, tiene como característica que en cada uno de los cubos pequeños, sea cual sea el caso, la premisa menor está en el modo A. La variable (la premisa menor) varía a través de las fases A , E , I , O , alejándose de la cara frontal del cubo o del plano frontal del que forma parte la cara frontal.

Y ahora podemos representar la tercera variable de forma precisamente similar. [Página 93] Podemos tomar la conclusión como tercera variable, recorriendo sus cuatro fases desde el plano de tierra hacia arriba. Cada uno de los pequeños cubos en la base del cubo entero tiene esto cierto, sea cual sea el caso, de que la conclusión está, en él, en el modo A. Así, para recapitular, la primera pared de dieciséis cubos pequeños, la primera de las cuatro paredes que, de izquierda a derecha, construyen todo el cubo, se caracteriza en cada parte por esto: que la premisa mayor está en la estado de ánimo A.

La siguiente pared indica que la premisa mayor está en el modo E , y así sucesivamente. Procediendo de adelante hacia atrás, la primera pared presenta una región en cada parte de la cual la premisa menor está en el modo A. La segunda pared es una región a lo largo de la cual la premisa menor está en el modo E , y así sucesivamente. En las capas, de abajo hacia arriba, la conclusión pasa por sus diversos estados de ánimo comenzando con A en la más baja, E en la segunda, I en la tercera, O en la cuarta.

En el caso general, en el que las variables representadas en el poiógrafo pasan por una amplia gama de valores, los planos desde los cuales medimos sus grados de variación en nuestra representación se consideran infinitamente extendidos. En este caso, sin embargo, lo único que nos preocupa es la región finita.

Ahora tenemos que representar, mediante alguna limitación del complejo que hemos obtenido, el hecho de que no toda combinación de premisas justifica ningún tipo de conclusión. Esto puede efectuarse simplemente marcando las regiones en las que las premisas, definidas por las posiciones, se encuentra una conclusión válida.

Tomando la conjunción de la premisa mayor, todo M es P , y la menor, todo S es M , concluimos que todo S es P. Por lo tanto, debe marcarse esa región en la que tenemos la conjunción de la premisa mayor en el modo A ; premisa menor, estado de ánimo A ; [Página 94] conclusión, estado de ánimo A . Este es el cubo que ocupa la esquina inferior izquierda del cubo grande.

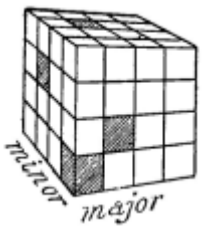


Figura 53.

Procediendo de esta manera, encontramos que las regiones a marcar son las que se muestran en la fig. 53 . Para discutir el caso que se muestra en el cubo marcado que aparece en la parte superior de la fig. 53 . Aquí la premisa principal está en la segunda pared a la derecha: está en el modo E y es del tipo no M es P. La premisa menor está en el ambiente caracterizado por la tercera pared desde el frente. Es del tipo algunos S es M . De estas premisas sacamos la conclusión de que algún S NO es P , una conclusión en el modo O. Ahora el modo O de la conclusión está representado en la capa superior. Por tanto vemos que la marca es correcta a este respecto.

Por supuesto, sería posible representar el cubo en un plano mediante cuatro cuadrados, como en la fig. 54 , si consideramos que cada cuadrado representa simplemente el comienzo de la región que representa. Así, todo el cubo puede representarse mediante

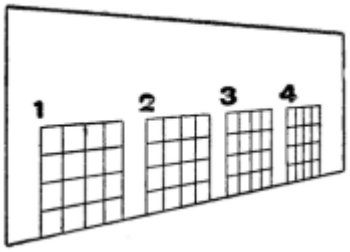


Figura 54.

cuatro cuadrados verticales, cada uno de los cuales representa una especie de bandeja vertical, y las marcas serían como se muestra. En el número 1, la premisa mayor está en el modo A para toda la región indicada por el cuadrado vertical de dieciséis divisiones; en el número 2 está en el estado de ánimo E , y así sucesivamente.

Una criatura confinada a un plano tendría que adoptar alguna forma disyuntiva de representar el cubo completo. Se vería obligado a representar lo que vemos como un todo en partes separadas, y cada parte simplemente representaría, no sería, ese contenido sólido que vemos.

La visión de estos cuatro cuadrados que tendría la criatura plana no sería como la nuestra. No vería el interior de los cuatro cuadrados representados arriba, pero cada uno estaría completamente contenido dentro de su contorno; los límites internos de los pequeños cuadrados separados no los podría ver excepto quitando los cuadrados exteriores. [Página 95]

Ahora estamos listos para introducir la cuarta variable involucrada en el silogismo.

Al asignar letras para denotar los términos del silogismo, hemos tomado S y P para representar el sujeto y el predicado en la conclusión y, por tanto, en la conclusión su orden es invariable. Pero en las premisas hemos tomado arbitrariamente el orden: todo M ES P Y todo S es M. No hay ninguna razón por la que M en lugar de P no deba ser el predicado de la premisa mayor, y así sucesivamente.

En consecuencia, tomamos el orden de los términos de las premisas como cuarta variable. De este orden existen cuatro variedades, y estas variedades se llaman figuras.

Usando el orden en que se escriben las letras para indicar que la primera letra escrita es sujeto y la segunda escrita es predicado, tenemos las siguientes posibilidades:

	1ª Figura.	2da Figura.	3ª Figura.	4ta Figura.
Importante	DIPUTADO	PM	DIPUTADO	PM
Menor	SM	SM	EM	EM

Existen por tanto cuatro posibilidades tanto respecto a esta cuarta variable como respecto a las premisas.

Hemos agotado nuestras dimensiones de espacio al representar las fases de las premisas y la conclusión con respecto al estado de ánimo, y para representar de manera análoga las variaciones de figura necesitamos una cuarta dimensión.

Ahora bien, al introducir esta cuarta dimensión debemos hacer un cambio en nuestros orígenes de medición análogo al que hicimos al pasar del plano al sólido.

Se supone que esta cuarta dimensión discurre en ángulo recto con cualquiera de las tres dimensiones espaciales, como la tercera dimensión espacial discurre en ángulo recto con las dos dimensiones de un plano, y así nos da la oportunidad de generar un nuevo tipo de volumen. Si todo el cubo se mueve en esta dimensión, el propio sólido traza un camino, cada sección del cual, hecha en ángulo recto con la dirección en la que se mueve, es un sólido, una repetición exacta del propio cubo. [Página 96]

El cubo tal como lo vemos es el comienzo de un sólido de tal tipo. Representa una especie de bandeja, ya que la cara cuadrada del cubo es una especie de bandeja sobre la que se apoya el cubo.

Supongamos que el cubo se mueve en esta cuarta dimensión en cuatro etapas, y dejamos que la región hipersólida trazada en la primera etapa de su progreso se

caracterice por esto, que los términos del silogismo están en la primera figura, entonces podemos representar en cada una de las tres etapas posteriores las tres figuras restantes. Así, todo el cubo forma la base a partir de la cual medimos la variación de la figura. La primera figura es válida para el cubo tal como lo vemos, y para ese hipersólido que se encuentra dentro de la primera etapa; la segunda cifra es válida en la segunda etapa, y así sucesivamente.

Así medimos desde todo el cubo en lo que a cifras se refiere.

Pero vimos que cuando medimos en el cubo mismo que tenía tres variables, es decir, las dos premisas y la conclusión, medimos desde tres planos. La base desde la cual medimos fue en todos los casos la misma.

Por lo tanto, al medir en este espacio superior debemos tener bases del mismo tipo para medir, debemos tener bases sólidas.

La primera base sólida se ve fácilmente, es el propio cubo. La otra se puede encontrar a partir de esta consideración.

Ese sólido del que medimos figura es el de el cual las variables restantes recorren toda su gama de variedades. [Página 97]

Ahora bien, si queremos medir con respecto a los modos de la premisa mayor, debemos dejar que la premisa menor, la conclusión, recorra su alcance y también el orden de los términos. Es decir debemos tomar como base de medición respecto de los estados de ánimo del mayor lo que representa la variación de los estados de ánimo del menor, la conclusión y la variación de las figuras.

Ahora la variación de los modos del menor y de la conclusión están representadas en la cara cuadrada de la izquierda del cubo. Aquí están todas las variedades de la premisa menor y la conclusión. Las variedades de las figuras se representan mediante etapas de un movimiento que se desarrolla en ángulo recto con respecto a todas las direcciones del espacio y, por consiguiente, en ángulo recto con respecto a la cara en cuestión, la cara izquierda del cubo.

En consecuencia, moviendo la cara izquierda en esta dirección obtenemos un cubo, y en este cubo están representadas todas las variedades de la premisa menor, la conclusión y la figura.

De este modo se le da al cubo otra base cúbica de medida, generada por el movimiento del cuadrado de la izquierda en la cuarta dimensión.

Encontramos las otras bases de manera similar, una es el cubo generado por el cuadrado frontal movido en la cuarta dimensión para generar un cubo. Desde este cubo se miden las variaciones en el estado de ánimo del menor. La cuarta base es la que se encuentra moviendo el cuadrado inferior del cubo en la cuarta dimensión. En este cubo se dan las variaciones de la mayor, la menor y la figura. Considerando esto como base en las cuatro etapas que a partir de él se derivan, se dan las variaciones en los modos de la conclusión.

Cualquiera de estas bases cúbicas se puede representar en el espacio, y luego el sólido superior generado a partir de ellas se encuentra fuera de nuestro espacio. Sólo puede representarse mediante un dispositivo análogo a aquel mediante el cual el ser plano representa un cubo. [Pág. 98]

Representa el cubo que se muestra arriba, tomando cuatro secciones cuadradas y colocándolas arbitrariamente a distancias convenientes una de la otra.

Así que debemos representar este sólido superior mediante cuatro cubos: cada cubo representa sólo el comienzo del volumen superior correspondiente.

Nos basta, pues, con dibujar cuatro cubos, representando el primero la región en la que la figura es de la primera especie, el segundo la región en la que la figura es de la segunda especie, y así sucesivamente. Estos cubos no son más que los comienzos de las regiones respectivas; son, por así decirlo, las bandejas sobre las cuales deben concebirse que descansan los sólidos reales, de donde parten. El primero, al ser el inicio de la región de la primera figura, se caracteriza por que el orden de los términos en las premisas es el de la primera figura. De manera similar, la segunda tiene los términos de las premisas en el orden de la segunda figura, y así sucesivamente.

Estos cubos se muestran a continuación.

Para mostrar las propiedades del método de representación, no para resolver el problema lógico, haré una digresión. Representaré en el espacio los estados de ánimo de la menor y de la conclusión y las diferentes figuras, manteniendo la mayor siempre en estado de ánimo A. Aquí tenemos tres variables en diferentes etapas, la menor, la conclusión y la figura. Imaginemos que el cuadrado del lado izquierdo del cubo original está solo, sin la parte sólida del cubo, representada por (2) fig. 55 . Las A , E , I , O , que se escapan representan los estados de ánimo del menor, las A , E , I , O , que corren hacia arriba representan los estados de ánimo de la conclusión. Todo el cuadrado, dado que es el comienzo de la región en la premisa mayor, modo A , debe considerarse como en la premisa mayor, modo A.

De este cuadrado se supondrá que la dirección en que están representadas las figuras corre hacia la izquierda. Así, tenemos un cubo (1) que parte del cuadrado de arriba, en el que el cuadrado mismo está oculto, pero se ven las letras A , E , I , O DE LA CONCLUSIÓN. En este cubo tenemos la premisa menor y la conclusión en todos sus modos, y todas las figuras representadas. Con respecto a la premisa mayor, dado que la cara (2) pertenece a la primera pared desde la izquierda en la disposición original, y en esta disposición estaba caracterizada por la premisa mayor en el modo A , podemos decir que la totalidad del cubo que hemos presentado ahora representa el estado de ánimo A de la premisa mayor. [Pág. 99]

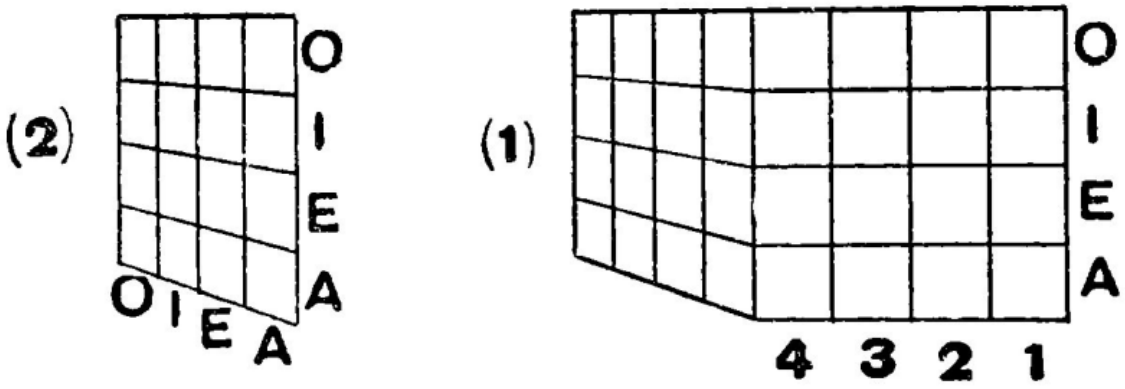


Figura 55.

Por lo tanto, el pequeño cubo en la parte inferior derecha de 1, más cercano al espectador, es la premisa mayor, estado de ánimo A ; premisa menor, modo A ; conclusión, estado de ánimo A ; y calcula el primero. El cubo contiguo, que corre hacia la izquierda, es la premisa mayor, modo A ; premisa menor, modo A ; conclusión, estado de ánimo A ; Figura 2.

Entonces en este cubo tenemos las representaciones de todas las combinaciones que pueden ocurrir cuando la premisa mayor queda en el modo A , la premisa menor, la conclusión y las figuras pasan por sus variedades.

En este caso no hay espacio en el espacio para una representación natural de los estados de ánimo de la premisa mayor. Para representarlos debemos suponer como antes que existe una cuarta dimensión, y partiendo de este cubo como base en la cuarta dirección en cuatro etapas iguales, todo el primer volumen corresponde a la premisa mayor A , el segundo a la mayor premisa, estado de ánimo E , la siguiente al estado de ánimo I , y la última al estado de ánimo O . [Página 100]

El cubo que vemos es, por así decirlo, simplemente una bandeja sobre la que descansa la figura de cuatro dimensiones. Su sección en cualquier etapa es un cubo. Pero una transición en esta dirección transversal a todo nuestro espacio no está representada por ningún movimiento espacial. Podemos exhibir etapas sucesivas del resultado de la transferencia del cubo en esa dirección, pero no podemos exhibir el producto de una transferencia, por pequeña que sea, en esa dirección.

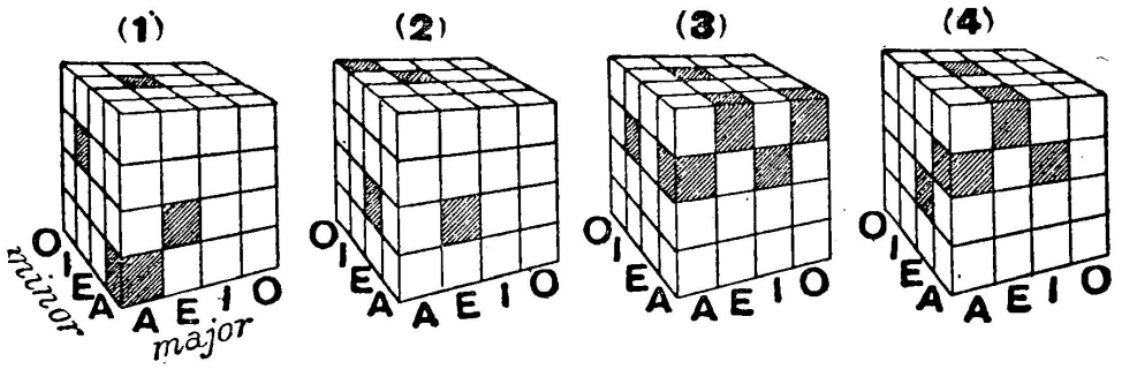


Figura 56.

Para volver al método original de representar nuestras variables, considere la fig. 56 . Estos cuatro cubos representan cuatro secciones de la figura que se derivan del primero de ellos moviéndolo en la cuarta dimensión. La primera parte del movimiento, que comienza con 1, traza un cuerpo más que sólido, que está todo en la primera figura. El comienzo de este cuerpo se muestra en 1. La siguiente parte del movimiento traza un cuerpo más que sólido, todo lo cual está en la segunda figura; el inicio de este cuerpo se muestra en 2; 3 y 4 siguen de la misma manera. Aquí, entonces, en una figura de cuatro dimensiones tenemos todas las combinaciones de las cuatro variables, premisa mayor, premisa menor, figura, conclusión, representadas, cada variable pasando por sus cuatro variedades. Los cubos desconectados dibujados son nuestra representación en el espacio mediante secciones desconectadas de este cuerpo superior.

Ahora bien, sólo un número limitado de conclusiones son verdaderas; su verdad depende de las combinaciones particulares de las premisas y figuras que las acompañan. La cifra total así representada puede denominarse universo del pensamiento con respecto a estos cuatro constituyentes, y del universo de combinaciones posiblemente existentes es competencia de la lógica seleccionar aquellas que correspondan a los resultados de nuestras facultades de razonamiento. [Página 101]

Podemos repasar cada una de las premisas en cada uno de los estados de ánimo y descubrir qué conclusión se sigue lógicamente. Pero esto se hace en los trabajos sobre lógica; Lo más simple y claro es que creo en la “Lógica de Jevon”. Como sólo nos interesa una presentación formal de los resultados, haremos uso de las líneas nemotécnicas impresas a continuación, en las que las palabras entre paréntesis se refieren a las cifras y no son significativas:

Barbara celarent Darii ferio *que* [prioris].
Caesare Camestris Festino Baroko [secundae].
[Tertia] darapti disamis datisi felapton.
Bokardo ferisson *habet* [Quarta insuper addit].
Bramantip camenes dimaris ferapton fresison.

En estas líneas cada palabra significativa tiene tres vocales, la primera vocal se refiere a la premisa mayor y da el modo de esa premisa, “a” significa, por ejemplo, que el modo mayor está en el modo *a* . La segunda vocal se refiere a la premisa menor y da su modo. La tercera vocal se refiere a la conclusión y da su modo. Así (prioris) —de la primera figura— la primera palabra mnemotécnica es “barbara”, y esto da como premisa mayor el modo A ; premisa menor, modo A ; conclusión, estado de ánimo A . Por consiguiente, en el primero de nuestros cuatro cubos marcamos el cubo delantero izquierdo más bajo. Para tomar otro ejemplo en la tercera figura “Tertia”, la palabra “ferisson” nos da el modo de

premisa mayor E ; *por ejemplo* , ninguna M es P , el modo de premisa menor I ; alguna M es S , conclusión, modo O ; algún S no es P . La región a marcar entonces. en el tercer cubo representativo está el de la segunda pared a la derecha para la premisa mayor, la tercera pared desde el frente para la premisa menor y la capa superior para la conclusión. [Página 102]

Se ve fácilmente que en el diagrama está marcado este cubo, y así con todas las conclusiones válidas. Las regiones marcadas en la región total muestran qué combinaciones de las cuatro variables, premisa mayor, premisa menor, figura y conclusión existen.

Es decir, objetivamos todas las conclusiones posibles y construimos una variedad ideal que contiene todas las combinaciones posibles de ellas con las premisas, y luego eliminamos de esto todo lo que no satisface las leyes de la lógica. El residuo es el silogismo, considerado como canon de razonamiento.

Si se observa la forma que representa la totalidad de las conclusiones válidas, no presenta ninguna simetría evidente ni naturaleza fácilmente caracterizable. Sin embargo, se obtiene una configuración llamativa si proyectamos la figura tetradimensional obtenida en una tridimensional; es decir, si tomamos en el cubo base todos aquellos cubos que tienen un espacio marcado en cualquier parte de la serie de cuatro regiones que parten de ese cubo.

Esto corresponde a hacer abstracción de las cifras, dando todas las conclusiones que son válidas cualquiera que sea la cifra.

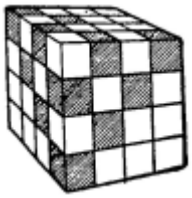


Figura 57.

Procediendo de esta manera obtenemos la disposición de los cubos marcados que se muestra en la fig. 57 . Vemos que las conclusiones válidas están dispuestas casi simétricamente alrededor de un cubo: el que está en la parte superior de la columna que comienza en AAA . Sin embargo, hay una ruptura de continuidad en este esquema. Un cubo no está marcado, lo que si estuviera marcado daría simetría. Es el que se denotaría por el letras I , E , O , en la tercera pared a la derecha, la segunda pared de distancia, la capa más superior. Ahora bien, esta combinación de premisas en el modo IE , con una conclusión en el modo O , no se advierte en ningún libro de lógica con el que esté familiarizado. Veámoslo por nosotros mismos, ya que parece que debe haber algo curioso en relación con esta ruptura de continuidad en el poiógrafo. [Página 103]

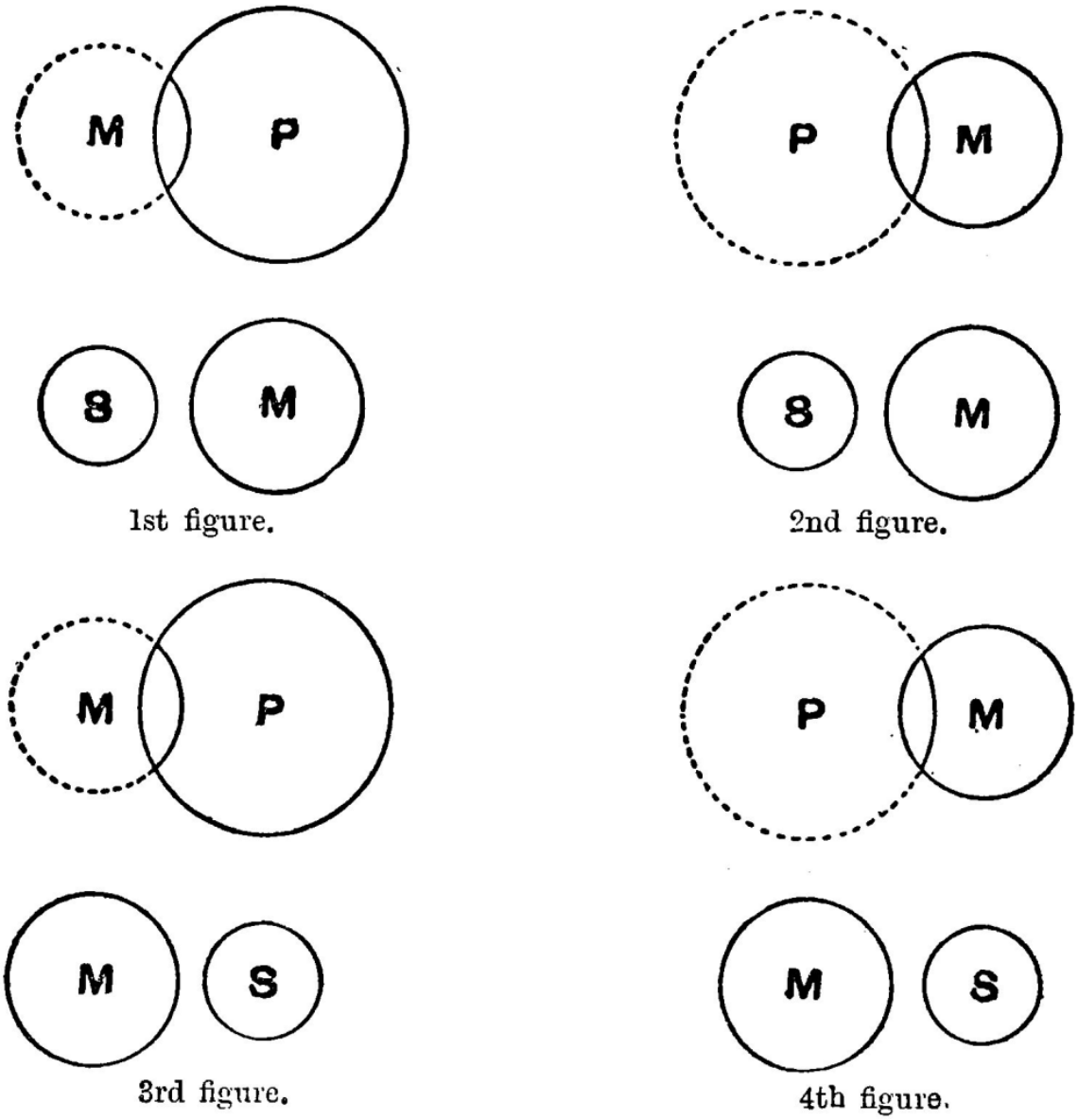


Figura 58.

Las proposiciones I , E , en las distintas figuras son las siguientes, como se muestra en el esquema adjunto, fig. 58 :—Primera figura: alguna M es P ; ninguna S es M. _ Segunda figura: algo DE P es M ; ninguna S es M. _ Tercera figura: alguna M es P ; no SEÑORITA . _ _ Cuarta figura: algún P es M ; no SEÑORITA . _ _

Al examinar estas figuras, vemos, tomando la primera, que si algún M es P y ningún S es M , no tenemos ninguna conclusión de la forma S es P en los distintos estados de ánimo. Es bastante indeterminado cómo se encuentra el círculo que representa S con respecto al círculo que representa P. Puede estar dentro, fuera o parcialmente dentro de P. Lo mismo ocurre en las otras figuras 2 y 3. Pero cuando llegamos a la cuarta figura, dado que M y S están completamente fuera uno del otro, no puede estar dentro de S la parte de P que está dentro de M. Ahora sabemos por la premisa mayor que parte de P SE encuentra en M. Por tanto , S no puede contener la totalidad de P. En palabras, algo de P es M , ningún M ES S , por lo tanto S no contiene todo P. Si tomamos A P como sujeto, esto nos da una conclusión en el modo O sobre P. Algún P no es S. Pero no nos da una conclusión sobre S en ninguna de las cuatro formas reconocidas en el silogismo y llamadas estados de ánimo. De ahí que la ruptura de la continuidad en el poiógrafo nos haya permitido detectar una falta de completitud en las relaciones que se consideran en el silogismo.

[Página 104]

Por poner un ejemplo: algunos americanos (P) son de origen africano (M); Ningún ario (S) es de origen africano (M); Los arios (S) no incluyen a todos los estadounidenses (P).

Para sacar una conclusión sobre S tenemos que admitir el enunciado " S no contiene la totalidad de P " como una forma lógica válida: es un enunciado sobre S que se puede hacer. La lógica que nos da la forma "algo de P no es S ", y que no nos permite dar la forma exactamente equivalente e igualmente primaria, " S no contiene la totalidad de P ", es artificial.

Y quiero señalar que esta artificialidad conduce a un error.

Si confiáramos en las líneas mnemotécnicas dadas anteriormente, concluiríamos que no se puede extraer ninguna conclusión lógica sobre S A PARTIR DE LA AFIRMACIÓN "ALGUNOS P son M , ningún M es S ".

Pero se puede sacar una conclusión: S no contiene la totalidad de P .

No es que el resultado se dé expresado en otra forma. Las líneas mnemotécnicas niegan que se pueda sacar alguna conclusión a partir de premisas en los modos I , E , respectivamente. [Página 105]

Así, un simple poiógrafo de cuatro dimensiones nos ha permitido detectar un error en las líneas mnemotécnicas que se han transmitido indiscutiblemente desde la época medieval. Para discutir más a fondo el tema de estas líneas, un lógico que las defienda probablemente diría que una afirmación particular no puede ser una premisa mayor; y así negar la existencia de la cuarta figura en la combinación de estados de ánimo.

Para tomar nuestro ejemplo: algunos estadounidenses son de origen africano; ningún ario es de origen africano. Diría que la conclusión es que algunos estadounidenses no son arios; y que la segunda afirmación es la mayor. ¡Se negaría a decir nada sobre los arios, condenándonos a un silencio eterno sobre ellos, en lo que respecta a estas premisas! Pero, si hay un enunciado que implica la relación de dos clases, debe poder expresarse como un enunciado sobre cualquiera de ellas.

Impedir la conclusión de que "los arios no incluyen a todos los estadounidenses" es puramente improvisado a favor de una clasificación falsa.

Y el argumento extraído de la universalidad de la premisa mayor no puede mantenerse de manera consistente. Se excluirían combinaciones como O mayor , A menor , conclusión O , ES *decir* , que algunas montañas (M) no sean permanentes (P); todas las montañas (M) son paisajes (S); algunos paisajes (S) no son permanentes (P).

Esto está permitido en la "Lógica de Jevon", y su omisión de discutir I , E , O , en la cuarta figura, es inexplicable. Se puede hacer una descripción satisfactoria del esquema lógico admitiendo el uso de las palabras algunos, ninguno o todos, tanto sobre el predicado como sobre el sujeto. Entonces podemos expresar la afirmación: "Los arios no incluyen a todos los estadounidenses", torpemente, pero, cuando se comprende su oscuridad, correctamente, como "Algunos arios no son todos los estadounidenses". [Página 106]
americanos". Y este método es lo que se llama la "cuantificación del predicado".

Las leyes de la lógica formal coinciden con las conclusiones que se pueden extraer sobre regiones del espacio que se superponen entre sí de diversas maneras posibles. No es difícil establecer las relaciones u obtener una poiografía simétrica. Pero entrar en esta rama de la geometría va más allá de nuestro propósito actual, que es mostrar la aplicación del poiógrafo en una región finita y limitada, sin ninguna de las complejidades que acompañan a su uso con respecto a los objetos naturales.

Si tomamos estos últimos (las plantas, por ejemplo) y, sin suponer direcciones fijas en el espacio como representativas de variaciones definidas, disponemos los puntos representativos de tal manera que correspondan a las similitudes de los objetos, obtenemos una configuración de interés singular; y tal vez de esta manera, al crear formas de formas, cuerpos con cuerpos omitidos, se podría obtener alguna idea de la estructura de las especies y géneros.

CAPÍTULO IX

[Página 107]

APLICACIÓN A LA TEORÍA DE LA EXPERIENCIA DE KANT

Cuando observamos los cuerpos celestes nos damos cuenta de que todos participan en un movimiento universal: una revolución diurna alrededor del eje polar.

En el caso de las estrellas fijas esto es absolutamente cierto, pero en el caso del Sol, y también de los planetas, el movimiento único de revolución puede discernirse, modificarse y alterarse ligeramente por otros movimientos secundarios.

De ahí que la característica universal de los cuerpos celestes sea que se mueven en un círculo diurno.

Pero sabemos que este gran hecho que es cierto para todos ellos en realidad no tiene nada que ver con ellos. La revolución diurna que realizan visiblemente es el resultado de la condición del observador. Debido a que el observador se encuentra en una Tierra en rotación, se puede hacer una afirmación universal sobre todos los cuerpos celestes.

La declaración universal que es válida acerca de cada uno de los cuerpos celestes es la que no les concierne en absoluto y no es más que una declaración de la condición del observador.

Ahora bien, hay afirmaciones universales de otros tipos que podemos hacer. Podemos decir que todos los objetos de la experiencia están en el espacio y sujetos a las leyes de la geometría.

[Página 108]

¿Significa esto que el espacio y todo lo que significa se debe a una condición del observador?

Si una ley universal en un caso no significa nada que afecte a los objetos mismos, sino sólo una condición de observación, ¿es esto cierto en todos los casos? En astronomía se nos muestra una *vera causa* para la afirmación de un universal. ¿Se puede buscar la misma causa en todas partes?

Ésta es una primera aproximación a la doctrina de la crítica de Kant.

Es la aprehensión de una relación en la que, de un lado y del otro, entran constituyentes perfectamente definidos –el observador humano y las estrellas– y una transferencia de esta relación a una región en la que los constituyentes de cada lado son perfectamente desconocidos.

Si la espacialidad se debe a una condición del observador, el observador no puede ser este yo corporal nuestro: el cuerpo, como los objetos que lo rodean, están igualmente en el espacio.

Kant aplicó esta concepción no sólo a las intuiciones de los sentidos, sino también a los conceptos de la razón: dondequiera que se hace una afirmación universal se le brinda una oportunidad para aplicar su principio. Construyó un sistema en el que apenas se sabe qué admirar más, si la habilidad arquitectónica o la reticencia ante las cosas en sí mismas y el observador en sí mismo.

Su sistema puede compararse a un jardín, algo formal quizás, pero con el encanto de una cualidad más que intelectual, una *besonnenheit* , una exquisita moderación sobre todo. Y del suelo que tan cuidadosamente preparó con aquello enterrado en la oscuridad, que conviene que sea oscuro, florece la ciencia y crece el árbol del verdadero conocimiento.

La crítica es un depósito de ideas de profundo interés. Aquélla de la que he dado una exposición parcial conduce, como veremos al estudiarla en detalle, a una teoría de las matemáticas que sugiere investigaciones en muchas direcciones.

La justificación de mi tratamiento se encontrará, entre otros pasajes, en esa parte de la analítica trascendental, en la que Kant habla de objetos de experiencia sujetos a las formas de la sensibilidad, no sujetos a los conceptos de la razón. [Página 109]

Kant afirma que siempre que pensamos pensamos en objetos en el espacio y el tiempo, pero niega que el espacio y el tiempo existan como entidades independientes. Se propone explicarlos, y su universalidad, no asumiéndolos, como lo hacen la mayoría de los demás filósofos, sino postulando su ausencia. ¿Cómo es posible entonces que para nosotros el mundo esté en el espacio y el tiempo?

Kant adopta la misma posición con respecto a lo que llamamos naturaleza: un gran sistema sujeto a la ley y el orden. "¿Cómo se explica la ley y el orden en la naturaleza?" preguntamos a los filósofos. Todos, excepto Kant, responden asumiendo la ley y el orden en alguna parte y luego mostrando cómo podemos reconocerlos.

Al explicar nuestras nociones, los filósofos desde un punto de vista distinto del kantiano suponen que las nociones existen fuera de nosotros, y luego no es una tarea difícil mostrar cómo llegan a nosotros, ya sea por inspiración o por observación.

Nos preguntamos: "¿Por qué tenemos una idea del derecho en la naturaleza?" “Porque los procesos naturales siguen una ley”, se nos responde, “y la experiencia heredada o adquirida nos da esta noción”.

Pero cuando hablamos de la ley en la naturaleza estamos hablando de una noción propia. Así que todo lo que hacen estos expositores es explicar nuestra noción mediante una suposición de la misma.

Kant es muy diferente. No supone nada. Una experiencia como la nuestra es muy diferente de la experiencia en abstracto. ¡Imagínese simplemente la experiencia, la sucesión de estados, de conciencia! Pues, no habría manera de conectar a dos, no habría identidad personal, sin memoria. Es a partir de una experiencia general como ésta, que, respecto de todo lo que llamamos real, es menos que un sueño, que Kant muestra la génesis de una experiencia como la nuestra. [Página 110]

Kant aborda el problema de la explicación del espacio, el tiempo y el orden y, por tanto, lógicamente no los presupone.

Pero, cuando cada acto de pensamiento se refiere a cosas en el espacio y el tiempo y ordenado, ¿cómo podremos representarnos ese algo perfectamente indefinido que es la hipótesis necesaria de Kant: aquello que no está en el espacio ni en el tiempo y no está ordenado? Ese es nuestro problema, representar aquello que Kant supone no sujeto a ninguna de nuestras formas de pensamiento, y luego mostrar alguna función que trabajando sobre eso lo convierta en una “naturaleza” sujeta a ley y orden, en el espacio y el tiempo. Kant llama a esta función “unidad de apercepción”; *es decir* , aquello que hace que nuestro estado de conciencia sea capaz de entretejerse en un sistema con un yo, un mundo exterior, una memoria, una ley, una causa y un orden.

La dificultad que encontramos al discutir la hipótesis de Kant es que todo lo que pensamos está en el espacio y el tiempo: ¿cómo entonces representaremos en el espacio una existencia que no está en el espacio, y en el tiempo una existencia que no está en el tiempo? Esta dificultad es aún más evidente cuando llegamos a construir un poiógrafo, ya que un poiógrafo es esencialmente una estructura espacial. Pero cuanto más evidente es la dificultad, más cercana está la solución. Si siempre pensamos en el espacio, *es decir* , utilizando conceptos espaciales, la primera condición para adaptarlos a la representación de la existencia no espacial es ser conscientes de las limitaciones de nuestro pensamiento y poder así tomar las medidas adecuadas para superarlas. él. El problema que tenemos ante nosotros, entonces, es representar en el espacio una existencia que no está en el espacio.

La solución es fácil. Lo proporciona la concepción de alternatividad.

[Página

Para aclarar nuestras ideas, retrocedamos detrás de las distinciones entre un mundo interior y un mundo exterior. Ambos, dice Kant, son productos. Tomemos simplemente estados de conciencia y no preguntemos si son producidos o superinducidos; plantear esa pregunta es haber ido demasiado lejos, haber supuesto algo cuyo origen no hemos rastreado. De estos estados digamos simplemente que ocurren. Usemos ahora la palabra "postura" para designar una fase de la conciencia reducida a su último estadio posible de evanescencia; Sea un postulado esa fase de conciencia de la que todo lo que se puede decir es que ocurre. 111]

Sean *a* , *b* , *c* , tres de esos supuestos. No podemos representarlos en el espacio sin colocarlos en un orden determinado, como *a* , *b* , *c* . Pero Kant distingue entre las formas de la sensibilidad y los conceptos de razón. Un sueño en el que todo sucede al azar sería una experiencia sujeta a la forma de la sensibilidad y sólo parcialmente sujeta a los conceptos de la razón. Está parcialmente sujeto a los conceptos de la razón porque, aunque no hay orden de secuencia, todavía en un momento dado hay orden. La percepción de una cosa como en el espacio es una forma de sensibilidad, la percepción de un orden es un concepto de la razón.

Por lo tanto, para llegar a ese proceso que Kant supone constitutivo de una experiencia ordenada, debemos imaginar los postulados en un espacio sin orden.

Tal como los conocemos deben estar en algún orden, *abc* , *bca* , *cab* , *acb* , *cba* , *bac* , uno u otro.

Para representarlos como si no tuvieran orden, conciba todos estos órdenes diferentes como si existieran igualmente. Introduzca el concepto de alternatividad: supongamos que el orden *abc* y *bac* , por ejemplo, existen igualmente, de modo que no podemos decir acerca de *a* que viene antes o después de *b* . Este correspondería a un cambio repentino y arbitrario de *a* en *b* y de *b* en *a* , de modo que, para usar las palabras de Kant, sería posible llamar a una cosa con un nombre en un momento y en otro momento con otro nombre. [Página 112]

En una experiencia de este tipo tenemos una especie de caos, en el que no existe ningún orden; es una variedad que no está sujeta a los conceptos de la razón.

Ahora bien, ¿existe algún proceso mediante el cual pueda introducirse orden en tal variedad? ¿Existe alguna función de la conciencia en virtud de la cual pueda surgir una experiencia ordenada?

En las condiciones precisas en las que se encuentran los postulados, como se describió anteriormente, no parece posible. Pero si imaginamos que existe una dualidad en lo múltiple, se puede descubrir fácilmente una función de la conciencia que producirá orden a partir de la falta de orden.

Imaginemos entonces que cada postura tiene un aspecto dual. Sea *a* 1 *a* en el que el aspecto dual está representado por la combinación de símbolos. Y de manera similar, sea *b* 2 *b* , *c* sea 3 *c* , en el que 2 y *b* representan los aspectos duales de *b* , 3 y *c* los de *c* .

Dado que *a* puede cambiar arbitrariamente a *b* , o a *c* , etc., las combinaciones particulares escritas anteriormente no se pueden mantener. Tenemos que suponer la ocurrencia igualmente posible de formas como 2 *a* , 2 *b* , etc.; y para obtener una representación de todas aquellas combinaciones a partir de las cuales cualquier conjunto es alternativamente posible, debemos tomar cada aspecto con cada aspecto. Es decir, debemos tener cada letra con cada número.

Apliquemos ahora el método de representación espacial.

> *Nota.* —Al comienzo del próximo capítulo se exhiben con más detalle las mismas estructuras que las que siguen y una referencia a ellas eliminará cualquier oscuridad que pueda encontrarse en los pasajes inmediatamente siguientes. ellos estan alli llevados

a una mayor multiplicidad de dimensiones, y la importancia del proceso aquí brevemente explicado se vuelve más evidente. [Página 113]

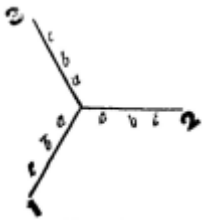


Figura 59.

Tome tres ejes mutuamente rectangulares en el espacio 1, 2, 3 (fig. 59), y en cada uno marque tres puntos, siendo el punto de encuentro común el primero en cada eje. Luego por medio de estos tres puntos en cada eje definimos 27 posiciones, 27 puntos en un grupo cúbico, como se muestra en la fig. 60 , utilizándose el mismo método de coordinación descrito anteriormente. Cada una de estas posiciones se puede nombrar mediante los ejes y los puntos combinados.

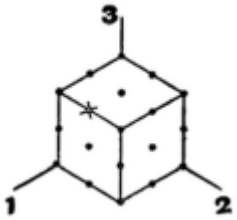


Figura 60.

Así, por ejemplo, el marcado con un asterisco puede llamarse 1 *c* , 2 *b* , 3 *c* , porque es opuesto a *c* en 1, a *b* en 2, a *c* en 3.

Tratemos ahora de los estados de conciencia correspondientes a estas posiciones. Cada punto representa un conjunto de postulados, y la multiplicidad de conciencia que les corresponde es de cierta complejidad.

Supongamos ahora que los constituyentes, los puntos de los ejes, se intercambian arbitrariamente, cualquiera se convierte en otro, y también los ejes 1, 2 y 3, se intercambian entre sí, cualquiera se convierte en otro, y están sujetos a no hay sistema ni ley, es decir, que el orden no existe, y que los puntos que corren hacia *abc* en cada eje pueden correr *hacia atrás* , y así sucesivamente.

Entonces cualquiera de los estados de conciencia representados por los puntos del grupo puede convertirse en cualquier otro. Tenemos una representación de una conciencia aleatoria de cierto grado de complejidad.

Examinemos ahora detenidamente un caso particular de intercambio arbitrario de los puntos *a* , *b* , *c* ; como uno de esos casos, considerado cuidadosamente, deja todo claro. [Página 114]

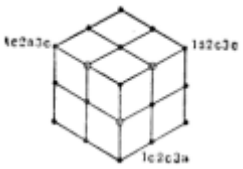


Figura 61.

Considere los puntos nombrados en la figura 1 *c* , 2 *a* , 3 *c* ; 1c , *2c* , *3a* ; _ 1 *a* , 2 *c* , 3 *c* , y examine el efecto sobre ellos cuando se produce un cambio de orden. Supongamos, por ejemplo, que *a* cambia a *b* , y llamemos a los dos conjuntos de puntos que obtenemos, el anterior y el posterior, conjugados por su cambio.

antes del cambio	1c 2a 3c _ _ _	1c 2c *3a* _ _ _	1 *a* 2 *c* 3 *c*	} Conjugados.
despues del cambio	1c 2b 3c _ _ _	1c 2c *3b* _ _ _	1b 2c 3c _ _ _	

Los puntos rodeados por anillos representan los puntos conjugados.

Es evidente que la conciencia, representada primero por el primer conjunto de puntos y después por el segundo conjunto de puntos, no tendría nada en común en sus dos fases. No sería capaz de dar cuenta de sí mismo. No habría identidad.

Figura 62.

Sin embargo, si podemos encontrar cualquier conjunto de puntos en el grupo cúbico que, cuando tiene lugar cualquier cambio arbitrario en los puntos de los ejes, o en los ejes mismos, se repita, se reproduzca, entonces una conciencia representada por esos puntos tendría una permanencia. Tendría un principio de identidad. A pesar de la no ley, del no orden de los constituyentes últimos, tendría un orden, formaría un

sistema, se cumpliría la condición de una identidad personal.

La pregunta viene entonces a esto. ¿Podemos encontrar un sistema de puntos que sea autoconjugado y que sea tal que cuando cualquier posición en los ejes se convierta en cualquier otra, o ¿Cuando un eje cualquiera se convierte en otro, tal conjunto se transforma en sí mismo, su identidad no se sumerge, sino que se eleva por encima del caos de sus constituyentes? [Página 115]

Se puede encontrar un conjunto así. Consideremos el conjunto representado en la fig. 62 , y escrito en la primera de las dos líneas:

autoconjugado {	1 *a* 2 *b* 3 *c*	1b *2a* 3c _ _ _	1 *c* 2 *a* 3 *b*	1 *c* 2 *b* 3 *a*	1b 2c 3a _ _ _	1 *a* 2 *c* 3 *b*
_	1 *c* 2 *b* 3 *a*	1b 2c 3a _ _ _	1 *a* 2 *c* 3 *b*	1 *a* 2 *b* 3 *c*	1b *2a* 3c _ _ _	1 *c* 2 *a* 3 *b*

Si ahora *cambiamos* a *c* y *c* a *a* , obtenemos el conjunto en la segunda línea, que tiene los mismos miembros que en la línea superior. Observando el diagrama vemos que correspondería simplemente al giro de las figuras en su conjunto. [2] Cualquier cambio arbitrario de los puntos de los ejes, o de los propios ejes, reproduce el mismo conjunto.

[2] Estas figuras se describen más detalladamente y ampliadas en el próximo capítulo.

De este modo se puede representar una función mediante la cual una conciencia aleatoria y desordenada podría dar lugar a una conciencia ordenada y sistemática. Cabe destacar que es un sistema de selección. Si de todas las formas alternativas sólo se atiende a la que es autoconjugada, se forma una conciencia ordenada. Una selección da una característica de permanencia.

¿Podemos decir que la conciencia permanente es esta selección?

Sale a la luz una analogía entre Kant y Darwin. Lo que es se aleja de lo fugaz, en virtud de que presenta un rasgo de permanencia. No es necesario suponer ninguna función de “atender”. Una conciencia capaz de dar cuenta de sí misma es aquella que se caracteriza por esta combinación. Todas las combinaciones existen; de esta clase es la conciencia que puede dar cuenta de sí misma. Y la dualidad misma que que hemos supuesto puede considerarse originado por un proceso de selección. [Página 116]

Darwin se propuso explicar el origen de la fauna y la flora del mundo. Negó tendencias específicas. Supuso una variabilidad indefinida, es decir, una probabilidad, pero una probabilidad confinada dentro de límites estrechos en lo que respecta a la magnitud de cualquier variación consecutiva. Demostró que los organismos que poseyeran características de permanencia, si ocurrieran, serían preservados. Así pues, su explicación de cualquier estructura o ser organizado era que poseía características de permanencia.

Kant, al no emprender la explicación de ningún fenómeno particular sino de lo que llamamos naturaleza en su conjunto, tenía un origen de las especies propio, una explicación de la flora y la fauna de la conciencia. Negó cualquier tendencia específica de los elementos de la conciencia, pero tomando nuestra propia conciencia, señaló aquello en lo que se parecía a cualquier conciencia que pudiera sobrevivir, que pudiera dar cuenta de sí misma.

Supone un mundo aleatorio o aleatorio, y como lo grande y lo pequeño no eran para él nociones dadas que pudiera utilizar, no limitó el azar, la aleatoriedad, de ninguna manera. Pero cualquier conciencia que sea permanente debe poseer ciertas características, es decir, aquellos atributos que le dan permanencia. Cualquier conciencia como la nuestra es simplemente una conciencia que posee esos atributos. Lo principal es lo que él llama unidad de la apercepción, que hemos visto anteriormente es simplemente la afirmación

de que un conjunto particular de fases de la conciencia, sobre la base de una completa aleatoriedad, será autoconjugado y, por tanto, permanente.

Como ocurre con Darwin y con Kant, la razón de la existencia de cualquier característica consiste en mostrar que tiende a la permanencia de aquello que la posee.

Por tanto, podemos considerar a Kant como el creador del primero de Las teorías modernas de la evolución. Y, como suele ocurrir, el primer esfuerzo fue el más estupendo en su alcance. Kant no investiga el origen de ninguna parte especial del mundo, como sus organismos, sus elementos químicos, sus comunidades sociales de hombres. Simplemente investiga el origen del todo, de todo lo que está incluido en la conciencia, el origen de esa "cosa pensada" cuya realización progresiva es el universo cognoscible. [Página 117]

Este punto de vista es muy diferente del ordinario, en el que se supone que un hombre debe ser colocado en un mundo como el que ha llegado a imaginar, y luego aprender lo que ha descubierto a partir de este modelo que él mismo ha creado. ha puesto en escena.

Todos sabemos que hay una serie de preguntas al intentar responderlas para las cuales tal suposición no es permisible.

Mill, por ejemplo, explica nuestra noción de "ley" mediante una secuencia invariable en la naturaleza. Pero lo que llamamos naturaleza es algo dado en el pensamiento. De modo que explica un pensamiento de ley y orden mediante un pensamiento de una secuencia invariable. Deja el problema donde lo encontró.

La teoría de Kant no es única ni está sola. Es una de varias teorías de la evolución. Se puede obtener una idea de su importancia y significado comparándola con otras teorías.

Así, en el mundo teórico de la selección natural de Darwin se hace una cierta suposición, la suposición de variabilidad indefinida (ligera variabilidad, es cierto, durante cualquier lapso de tiempo apreciable, pero indefinida en las épocas de transformación postuladas) y se muestra toda una cadena de resultados. seguir.

Este elemento de variación aleatoria no es, sin embargo, un lugar de descanso definitivo. Es una etapa preliminar. Este suponer el todo es un paso preliminar hacia el descubrimiento del todo. Si todo tipo de organismo pudiera entrar siendo, los que sobrevivan presentarán tales o cuales características. Este es el comienzo necesario para determinar qué tipos de organismos llegan a existir. Y así, la hipótesis kantiana de una conciencia aleatoria es el comienzo necesario para la investigación racional de la conciencia tal como es. Su suposición proporciona, por así decirlo, el espacio en el que podemos observar los fenómenos. Da las leyes generales constitutivas de cualquier experiencia. Si, bajo el supuesto de aleatoriedad absoluta en los constituyentes, tal o cual cosa sería característica de la experiencia, entonces, cualesquiera que sean los constituyentes, estas características deben ser universalmente válidas. [Página 118]

Procederemos ahora a examinar más detenidamente la poiografía, construida con el propósito de mostrar una ilustración de la unidad de apercepción de Kant.

Para mostrar el orden de derivación a partir del desorden ha sido necesario asumir un principio de dualidad (hemos tenido los ejes y las posiciones sobre los ejes), hay dos conjuntos de elementos, cada uno de ellos desordenado, y es en la relación recíproca de ellos se origina el orden, el sistema definido.

¿Hay algo en nuestra experiencia de la naturaleza de una dualidad?

Ciertamente hay objetos en nuestra experiencia que tienen orden y otros que son incapaces de tenerlo. Las dos raíces de una ecuación cuadrática no tienen orden. Nadie puede decir qué viene primero. Si un cuerpo se eleva verticalmente y luego se desplaza en ángulo recto con respecto a su curso anterior, nadie puede asignar prioridad alguna a la dirección norte o este. No hay prioridad en las direcciones de giro. Asociamos giros con progresiones sin orden en línea con orden. Pero en los ejes y puntos que hemos asumido anteriormente no existe tal distinción. Es lo mismo si suponemos un orden entre las

espiras y ningún orden entre los puntos de los ejes, o *viceversa* , un orden en los puntos y sin orden en los giros. Un ser con un número infinito de ejes mutuamente en ángulo recto, con una secuencia definida entre ellos y ninguna secuencia entre los puntos de los ejes, estaría en una condición formalmente indistinguible de la de una criatura que, según una suposición más natural nosotros, tenía en cada eje un número infinito de puntos ordenados y ningún orden de prioridad entre los ejes. Un ser en un mundo así constituido no sería capaz de decir cuál gira y cuál tiene longitud a lo largo de un eje, para poder distinguir entre ellos. Así, para tomar un ejemplo pertinente, podemos estar en un mundo de un número infinito de dimensiones, con tres puntos arbitrarios en cada una (tres puntos cuyo orden es indiferente), o en un mundo de tres ejes de secuencia arbitraria con un número infinito de dimensiones ordenadas. puntos en cada uno. No podemos decir cuál es cuál para distinguirlo del otro. [Página 119]

Así pues, parece que el modo de ilustración que hemos utilizado no es artificial. Realmente existe en la naturaleza una dualidad del tipo que es necesario para explicar el origen del orden fuera del orden: la dualidad, a saber, de dimensión y posición. Utilicemos el término grupo para aquel sistema de puntos que permanece sin cambios, cualquiera que sea el cambio arbitrario de sus constituyentes. Observamos que un grupo implica una dualidad, es inconcebible sin dualidad.

Así, según Kant, el elemento primario de la experiencia es el grupo, y la teoría de grupos sería la rama más fundamental de la ciencia. Debido a una expresión en la crítica, a veces se aduce la autoridad de Kant contra la suposición de que el espacio tiene más de tres dimensiones. Me parece, sin embargo, que toda la tendencia de su teoría va en la dirección opuesta y apunta a una dualidad perfecta entre dimensión y posición en una dimensión.

Si el orden y la ley que vemos se deben a las condiciones de la experiencia consciente, debemos concebir la naturaleza como espontánea, libre, sujeta a ninguna predicación que podamos idear, pero, por más aprehendida que sea, sujeta a nuestra lógica. [Página 120]

Y nuestra lógica es simplemente espacialidad en el sentido general: la resultante de una selección de lo permanente de lo no permanente, de lo ordenado de lo desordenado, por medio del grupo y su dualidad subyacente.

No podemos predicar nada sobre la naturaleza, sólo sobre la manera en que podemos aprehenderla. Lo único que podemos decir es que todo lo que nos dé la experiencia estará condicionado como espacial, sujeto a nuestra lógica. Así, al explorar los hechos de la geometría, desde las relaciones lógicas más simples hasta las propiedades del espacio de cualquier número de dimensiones, simplemente nos estamos observando a nosotros mismos, tomando conciencia de las condiciones bajo las cuales debemos percibir. Si algún fenómeno se presenta incapaz de explicación bajo el supuesto del espacio con el que estamos tratando, entonces debemos acostumbrarnos a la concepción de un espacio superior, para que nuestra lógica pueda estar a la altura de la tarea que tenemos por delante.

Obtenemos una repetición del pensamiento anterior, sugerido experimentalmente. Si las leyes de la comprensión intelectual de la naturaleza son las que se derivan de considerarla como azar absoluto, sin sujeción a ninguna ley salvo la derivada de un proceso de selección, entonces, tal vez, el orden de la naturaleza requiere facultades diferentes del intelectual para aprehenderlo. Es posible que haya que buscar la fuente y el origen de las ideas en otra parte que no sea el razonamiento.

El resultado total de la crítica es dejar al hombre corriente exactamente donde está, justificado en su actitud práctica hacia la naturaleza, liberado de las cadenas de sus propias representaciones mentales.

La verdad de una imagen reside en su efecto total. Es en vano buscar información sobre el paisaje a través de un examención de los pigmentos. Y en cualquier método de pensamiento es la complejidad del todo lo que nos lleva al conocimiento de la naturaleza. [Página 121]

Las dimensiones son bastante artificiales, pero en la multiplicidad de ellas respiramos un poco de naturaleza.

Por lo tanto, debemos, y esto me parece la conclusión práctica de todo el asunto, proceder a formar medios de aprehensión intelectual de un grado cada vez mayor de complejidad, tanto dimensionalmente como en extensión en cualquier dimensión. Tales medios de representación deben ser siempre artificiales, pero en la multiplicidad de los elementos con los que tratamos, por incipientemente arbitrarios que sean, reside nuestra posibilidad de aprehender la naturaleza.

Y como capítulo final de esta parte del libro, ampliaré las figuras que se han utilizado para representar la teoría de Kant en dos pasos, de modo que el lector tenga la oportunidad de observar una figura de cuatro dimensiones que se puede delinear. sin ninguno de los aparatos especiales, a cuya consideración pasaré posteriormente.

CAPÍTULO X

UNA FIGURA CUATRODIMENSIONAL

[Página 122]

El método utilizado en el capítulo anterior para ilustrar el problema de la crítica de Kant ofrece un modo singularmente fácil y directo de construir una serie de figuras importantes en cualquier número de dimensiones.

Hemos visto que para representar nuestro espacio un ser plano debe renunciar a uno de sus ejes, y de manera similar para representar las formas superiores debemos renunciar a uno de nuestros tres ejes.

Pero hay otro tipo de renuncia que reduce la construcción de formas superiores a una cuestión de la máxima simplicidad.

Normalmente tenemos en línea recta cualquier número de posiciones. La riqueza del espacio en posición es ilimitada, mientras que sólo hay tres dimensiones.

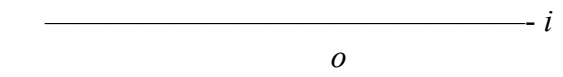
Propongo renunciar a esta riqueza de posiciones y considerar las cifras obtenidas tomando tantas posiciones como dimensiones.

De esta manera considero dimensiones y posiciones como dos “tipos”, y aplicando la simple regla de seleccionar cada una de un tipo con todas las demás de cualquier otro tipo, obtengo una serie de figuras que son notables porque llenan exactamente el espacio de cualquier número. de dimensiones (cuando el hexágono llena un plano) mediante repeticiones iguales de sí mismas.

[Página 123]

La regla se hará más evidente con una simple aplicación.

Consideremos una dimensión y una posición. Llamaré al eje *i* y a la posición *o* .



Aquí la figura es la posición *o* en la línea *i* . Tome ahora dos dimensiones y dos posiciones en cada una.

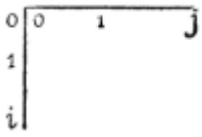


Figura 63.

Tenemos las dos posiciones *o* ; 1 en *i* , y las dos posiciones *o* , 1 en *j* , fig. 63 . Estos dan lugar a una cierta complejidad. Dejaré que las dos líneas *i* y *j* se encuentren en la posición que llamo *o* en cada una, y consideraré *i* como una dirección que comienza igualmente desde cada posición en *j* , y *j* que comienza igualmente desde cada posición en *i* . Obtenemos así la siguiente figura: A es a la vez *oi* y *oj* , B es 1 *i* y *oj* , y así sucesivamente como se muestra en la fig. 63b . _ Las posiciones en AC son todas posiciones *oi* . Son, si nos gusta considerarlo así, puntos que no están a ninguna distancia en la dirección *i* de la recta AC . Podemos llamar a la línea AC la línea *oi* . De manera similar, los puntos en AB son aquellos que no están a distancia de AB en la dirección *j* , y podemos llamarlos puntos *oj* y la línea AB , la línea *oj* . Nuevamente, la línea CD se puede llamar línea 1 *j* porque los puntos en ella están a una distancia 1 en la dirección *j* .

Tenemos entonces cuatro posiciones o puntos nombrados como se muestra y, considerando direcciones y posiciones como “tipos”, tenemos la combinación de dos tipos con dos tipos. Ahora, seleccionar cada uno de un tipo con todos los demás de otro tipo significará que tomamos 1 del tipo *i* y con él *o* del tipo *j* ; y luego, que tomemos *o* del tipo *i* y con ello 1 del tipo *j* .

[Página 124]

Así obtenemos un par de posiciones que se encuentran en la línea recta BC , fig. 64 . Podemos llamar a este par 10 y 01 si adoptamos el plan de mentalmente, añadiendo una *i*

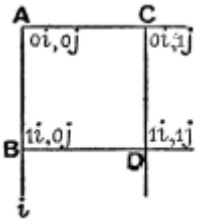


Figura *63b* .

al primero y una *j* al segundo de los símbolos escritos así: 01 es una expresión corta para O *i* , 1 *j* .

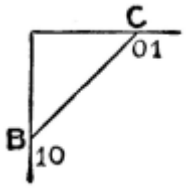


Figura 64.

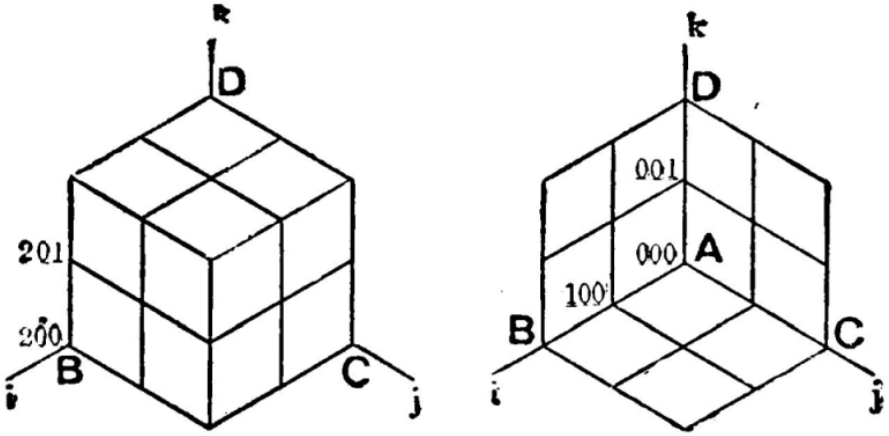


Figura 65.

Pasando ahora a nuestro espacio, tenemos tres dimensiones, por lo que tomamos tres posiciones en cada una. Supongo que estas posiciones están a distancias iguales a lo largo de cada eje. Los tres ejes y las tres posiciones de cada uno se muestran en los diagramas adjuntos, fig. 65 , de los cuales el primero representa un cubo con las caras anteriores visibles, el segundo las caras posteriores del mismo cubo; las posiciones las llamaré 0, 1, 2; los ejes, *i* , *j* , *k* . Tomo la base ABC como lugar de partida, desde donde determinar las distancias en la dirección *k* y, por lo tanto, cada punto en la base ABC será una posición *correcta* , y la base ABC se puede llamar un plano *correcto* .

De la misma manera, midiendo las distancias desde la cara ADC , vemos que cada posición en la cara ADC es una posición *oi* , y todo el plano de la cara puede denominarse plano *oi* . Así vemos que con la introducción de un En una nueva dimensión se altera el significado de un símbolo compuesto, como " *oi* ". En el avión significaba la línea AC . En el espacio significa todo el avión ACD . [Página 125]

Ahora bien, es evidente que tenemos veintisiete puestos, cada uno de ellos nombrado. Si el lector sigue esta nomenclatura con respecto a las posiciones marcadas en las figuras, no tendrá dificultad en asignar nombres a cada una de las veintisiete posiciones. A es *oi* , *do* , *ok* . Está a la distancia 0 a lo largo *de i* , 0 a lo largo de *j* , 0 a lo largo de *k* , e *io* se puede escribir en forma corta 000, donde se omiten los símbolos *ijk* .

El punto inmediatamente superior es 001, ya que no hay distancia en la dirección *i* y hay una distancia de 1 en la dirección *k* . Nuevamente, mirando a B , está a una distancia de 2 de A , o del plano ADC , en la dirección *i* , 0 en la dirección *j* del plano ABD , y 0 en la dirección *k* , medido desde el plano ABC . Por lo tanto, se escribe 200 para 2 *i* , 0 *j* , 0 *k* .

Ahora bien, de estas veintisiete “cosas” o compuestos de posición y dimensión, selecciona aquellas que están dadas por la regla, cada una de un tipo con todas las demás de cualquier otro tipo.

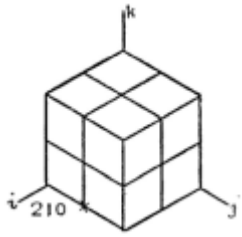


Figura 66.

Tome 2 del tipo *i* . Con esto debemos tener un 1 del tipo *j* , y luego por regla solo podemos tener un 0 del tipo *k* , pues si tuviéramos algún otro del tipo *k* deberíamos repetir uno de los tipos que ya teníamos. En 2 *i* , 1 *j* , 1 *k* , por ejemplo, 1 se repite. El punto que obtenemos es el marcado 210, fig. 66 .

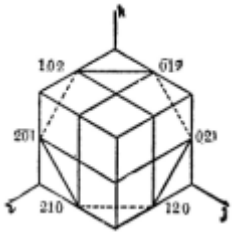


Figura 67.

Procediendo de este modo, destacamos el siguiente conjunto de puntos, fig. 67 . Están unidos por líneas, punteadas donde quedan ocultas por el cuerpo del cubo, y vemos que forman una figura, un hexágono que Podría sacarse del cubo y colocarse en un avión. Es una figura que llenará un plano con repeticiones iguales de sí misma. El plano que representa esta construcción en su plano necesitaría tres cuadrados para representar el cubo. Supongamos que toma los ejes *ij* en su espacio y *k* representa el eje que sale de su espacio, fig. 68 . En cada uno de los tres cuadrados mostrados aquí dibujados por separado podría seleccionar los puntos dados por la regla, y luego tendría que intentar descubrir la figura determinada por las tres líneas dibujadas. La línea de 210 a 120 se muestra en la figura, pero no la línea de 201 a 102 o GK . Puede determinar GK haciendo otra serie de dibujos y descubriendo en ellos cuál es la relación entre estas dos extremidades.

[Página 126]

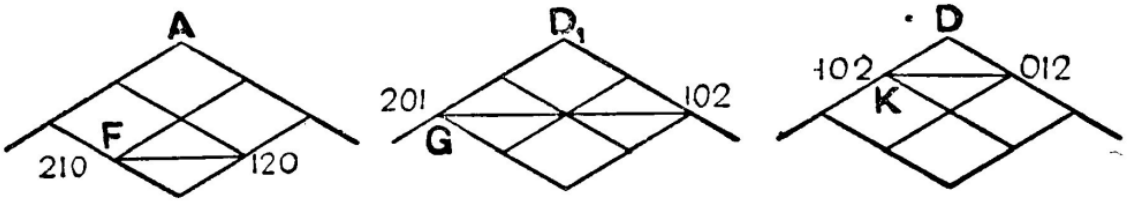


Figura 68.

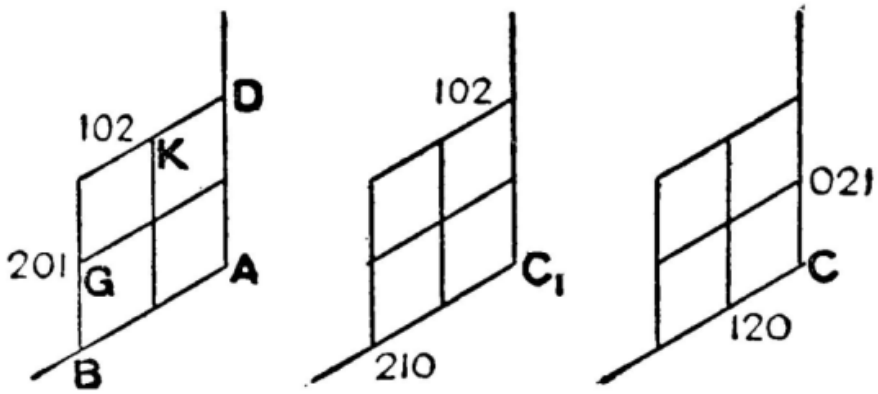


Figura 69.

Déjele dibujar los ejes *i* y *k* en su plano, fig. 69 . Luego el eje *j* termina y tiene la figura adjunta. En el primero de estos tres cuadrados, fig. 69 , él puede seleccione por la regla los dos puntos 201, 102 — G y K. Aquí se encuentran en un plano y él puede medir la distancia entre ellos. En su primera representación aparecen en G y K en figuras separadas.

[Página 127]

Así el ser plano encontraría que los extremos de cada una de las líneas estaban distantes por la diagonal de un cuadrado unitario del extremo correspondiente de la última y podría entonces colocar las tres líneas en su posición relativa correcta. Uniéndolos tendría la figura de un hexágono.

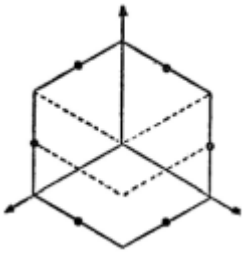


Figura 70.

También podemos notar que el ser plano podría hacer una representación de todo el cubo simultáneamente. Los tres cuadrados, mostrados en perspectiva en la fig. 70 , todos se encuentran en un plano, y en ellos el ser plano podría seleccionar cualquier selección de puntos tan bien como en tres cuadrados separados. Obtendría un hexágono uniendo los puntos marcados. Este hexágono, tal como está dibujado, tiene la forma correcta, pero no lo sería si se usaran cuadrados reales en lugar de perspectiva, porque la relación entre los cuadrados separados tal como se encuentran en la figura plana no es su relación real. La figura, sin embargo, así construida, le daría una idea de la figura correcta, y podría determinarla con precisión recordando que las distancias en cada cuadrado eran correctas, pero al pasar de un cuadrado a otro, su distancia en la tercera dimensión había cambiado. para ser tenido en cuenta.

Pasando ahora a la figura obtenida seleccionando según nuestra regla entre toda la masa de puntos dada por cuatro ejes y cuatro posiciones en cada uno, debemos dibujar primero una figura de catálogo en la que se muestre todo el conjunto.

Podemos representar este conjunto de puntos mediante cuatro figuras sólidas. La primera dando todos aquellos puestos que están a una distancia o de nuestro espacio en la cuarta dimensión, la segunda muestra todos los que están a una distancia 1, y así sucesivamente. [Página 128]

Cada una de estas figuras será cubos. Los dos primeros están dibujados mostrando las caras frontales, los dos segundos las caras traseras. Marcaremos los puntos 0, 1, 2, 3, colocando puntos a esas distancias a lo largo de cada uno de estos ejes, y supondremos que todos los puntos así determinados están contenidos en modelos sólidos de los cuales nuestros dibujos en la fig. 71 son representantes. Aquí notamos que así como en el plano 0 *i* significa toda la línea desde la cual se midieron las distancias en la dirección *i , y como en el espacio 0 i* significa todo el plano desde el cual se miden las distancias en la dirección *i* , ahora 0 *h* significa todo el espacio en el que se encuentra el primer cubo; midiendo desde ese espacio una distancia de uno llegamos al segundo cubo representado.

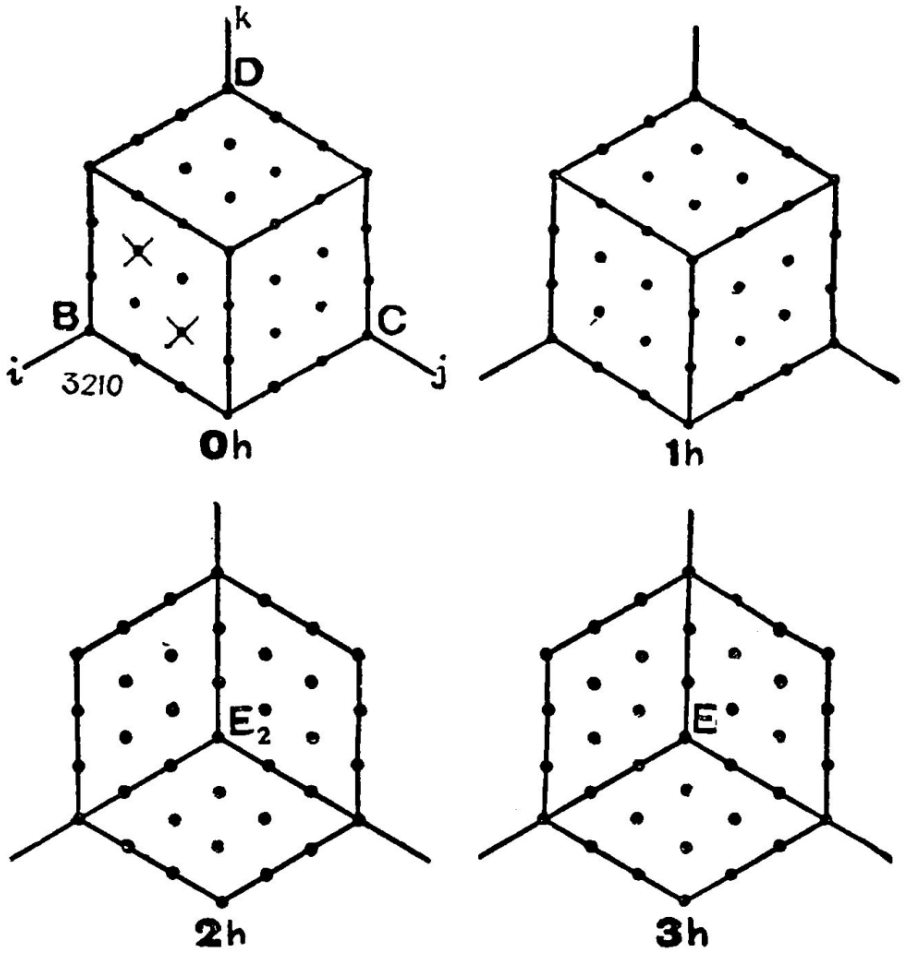


Figura 71.

Ahora, seleccionando según la regla cada uno de un tipo con todos los demás de cualquier otro tipo, debemos tomar, por ejemplo, 3 *i* , 2 *j* , 1 *k* , 0 *h* . Este punto está marcado como 3210 en la estrella inferior de la figura. Es 3 en la dirección *i* , 2 en la dirección *j* , 1 en la dirección *k* , 0 en la dirección *h* . [Página 129]

Con 3 *i* también debemos tomar 1 *j* , 2 *k* , 0 *h* . Este punto lo muestra la segunda estrella en el cubo 0 *h* .

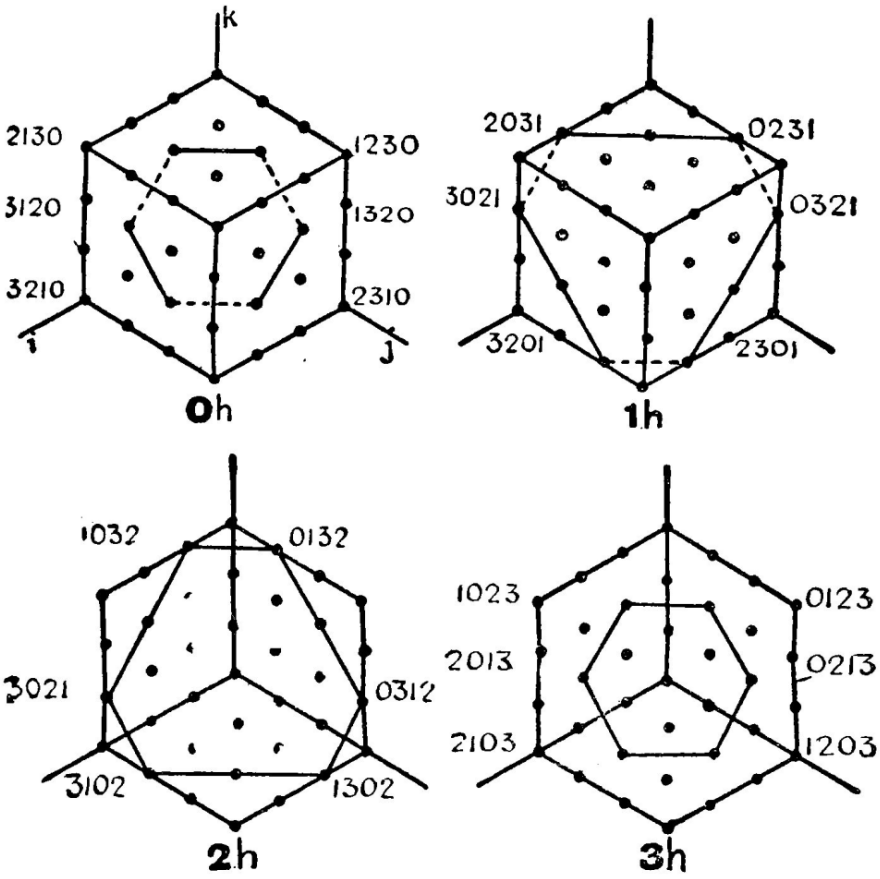


Figura 72.

En el primer cubo, como todos los puntos son 0 *h* puntos, sólo podemos tener variedades en las que *i* , *j* , *k* , estén acompañadas de 3, 2, 1.

Los puntos determinados están marcados en el diagrama fig. 72, y se dibujan líneas que unen los pares adyacentes en cada figura, siendo las líneas punteadas cuando pasan dentro de la sustancia del cubo en los dos primeros diagramas.

Frente a cada punto, a un lado o al otro de cada uno cubo, está escrito su nombre. Se observará que las figuras son simétricas a derecha e izquierda; y a derecha e izquierda los dos primeros números simplemente se intercambian. [Página 130]

Ahora que esta es nuestra selección de puntos, ¿qué cifra forman cuando todos se juntan en sus posiciones relativas adecuadas?

Para determinar esto debemos encontrar la distancia entre las esquinas correspondientes de los hexágonos separados.

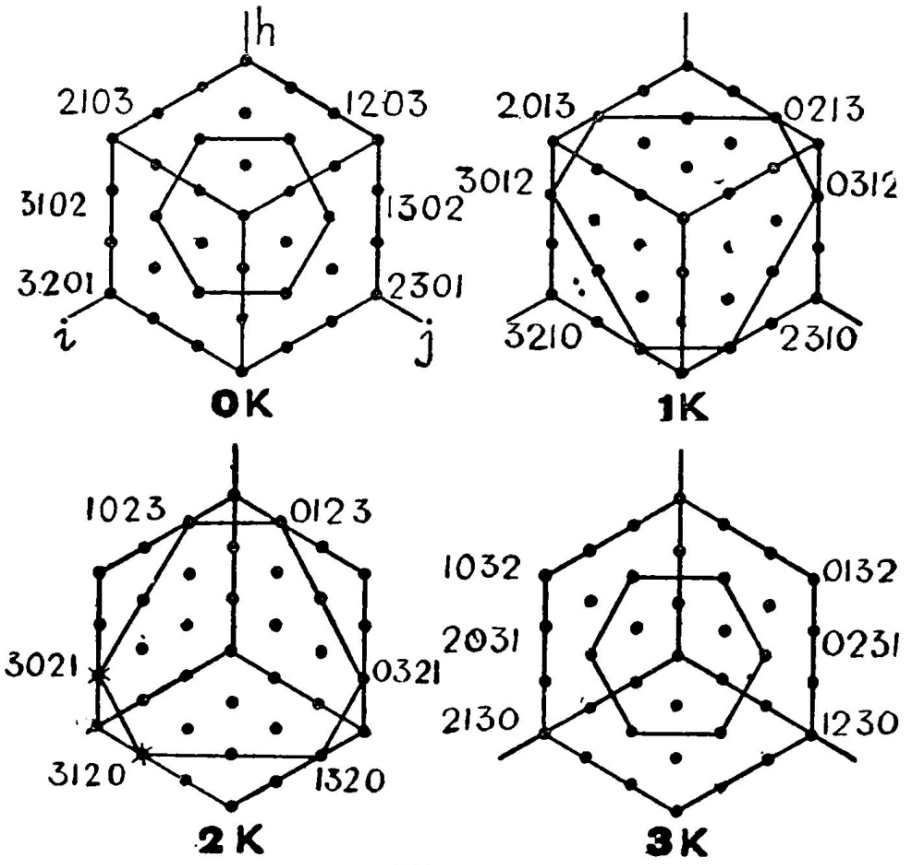


Figura 73.

Para hacer esto mantengamos los ejes *i* , *j* , en nuestro espacio, y dibujemos *h* en lugar de *k* , dejando que *k* se agote en la cuarta dimensión, fig. 73 .

Aquí tenemos nuevamente cuatro cubos, en el primero de los cuales todos los puntos son 0 *k* puntos; es decir, apunta a una distancia cero en la dirección *k* del espacio de las tres dimensiones *ijh* . Tenemos todos los puntos seleccionados antes, y algunas de las distancias, que en el último diagrama llevaban de figura en figura, se muestran aquí en la misma figura, y así pueden de medición. Tomemos, por ejemplo, los puntos 3120 a 3021, que en el primer diagrama (fig. 72) se encuentran en la primera y segunda figuras. Su relación real se muestra en la fig. 73 en el cubo marcado 2 K , donde los puntos en cuestión están marcados con un *. Vemos que la distancia en cuestión es la diagonal de un cuadrado unitario. De la misma manera encontramos que la distancia entre los puntos correspondientes de dos figuras hexagonales cualesquiera es la diagonal de un cuadrado unitario. La cifra total ahora es fácil de calcular. Puede hacerse una idea dibujando los cuatro cubos de la figura del catálogo en uno (fig. 74). Estos cubos son repeticiones exactas unos de otros, por lo que un dibujo nos servirá como representación de toda la serie, si tenemos cuidado de recordar dónde estamos, ya sea en 0 *h* , en 1 *h* , en 2 *h* o en 3 *h* . figura, cuando seleccionamos los puntos requeridos. La Fig. 74 es una representación de todos los cubos de catálogo puestos en uno. Para mayor claridad, las caras frontal y posterior de este cubo se representan por separado.

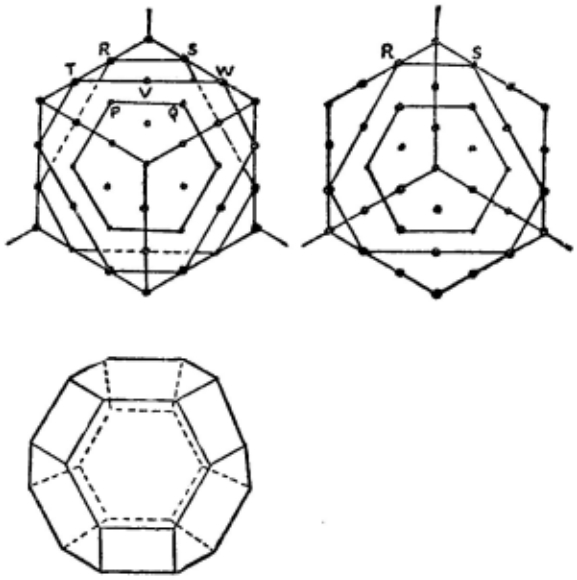


Figura 74.

[Página 131]

La cifra determinada por los puntos seleccionados se muestra a continuación.

Al unir las secciones, algunos de sus contornos desaparecen. La línea TW, por ejemplo, no es deseada.

Observamos que PQTW y TWRS son cada uno la mitad de un hexágono. Ahora QV y VR se encuentran en una línea recta. De ahí que estos dos hexágonos encajen entre sí formando un solo hexágono, y la línea TW sólo se busca cuando consideramos una sección de toda la figura, obtenemos así el sólido representado en la parte inferior de la fig. 74 . Repeticiones iguales de esta figura, llamada tetracaidecágono, llenarán el espacio tridimensional. [Página 132]

Para hacer la figura de cuatro dimensiones correspondiente tenemos que tomar cinco ejes que formen ángulos rectos con cinco puntos en cada uno. De esta manera se puede encontrar un catálogo de las posiciones determinadas en el espacio de cinco dimensiones.

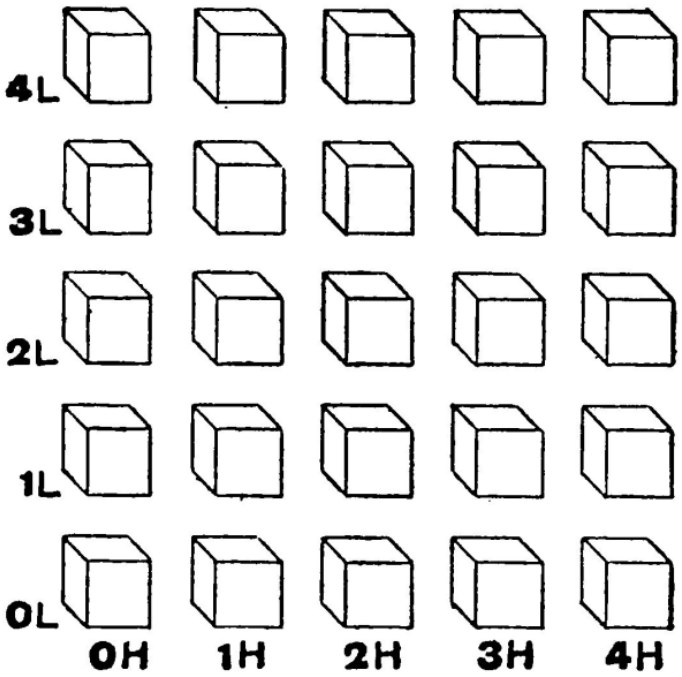


Figura 75.

Tome un cubo con cinco puntas en cada uno de sus ejes, el quinto punto está a una distancia de cuatro unidades de longitud del primero en cualquiera de los ejes. Y como la cuarta dimensión también se extiende hasta una distancia de cuatro, necesitaremos representar los sucesivos conjuntos de puntos a distancias 0, 1, 2, 3, 4; en la cuarta dimensión, cinco cubos. Ahora bien, todo esto no se extiende a ninguna distancia en la quinta dimensión. Para representar lo que hay en la quinta dimensión tendremos que dibujar, a partir de cada uno de nuestros cubos, cinco cubos similares para representar los cuatro pasos en la quinta dimensión. Mediante este ensamblaje obtenemos un catálogo de todos los puntos que se muestran en la fig. 75 , en el que *L* representa la quinta dimensión.

Ahora bien, como vimos antes, nada nos impide poner en una sola figura todos los cubos que representan las diferentes etapas de la cuarta dimensión, si tomamos observe cuando lo miramos, si lo consideramos como un cubo de 0 *h* , 1 *h* , 2 *h* , etc. Poniendo entonces los cubos 0 *h* , 1 *h* , 2 *h* , 3 *h* , 4 *h* de cada fila en uno, tenemos cinco cubos cuyos lados contienen cinco posiciones, el primero de estos cinco cubos representa los puntos 0 *l* , y tiene en él los *i* puntos de 0 a 4, los *j* puntos de 0 a 4, los *k* puntos de 0 a 4, mientras que tenemos que especificar con respecto a cualquier selección que hagamos de él, si lo consideramos como 0 *h* , una figura de 1 *h* , 2 *h* , 3 *h* o 4 *h* . En la Fig. 76 cada cubo está representado por dos dibujos, uno de la parte delantera y otro de la parte trasera. [Página 133]

Entonces coloquemos nuestros cinco cubos ante nosotros y hagamos nuestra selección de acuerdo con la regla. Tome la primera figura en la que todos los puntos son 0 *l* puntos. No podemos tener 0 con ninguna otra letra. Luego, manteniendo en la primera cifra, que es la de las posiciones 0 *l* , tomamos en primer lugar aquella selección que siempre contiene 1 *h* . Supongamos, por tanto, que el cubo es un cubo de 1 *h* , y en él tomamos *i* , *j* , *k* en combinación con 4, 3, 2 según la regla.

La figura que obtenemos es un hexágono, como se muestra, el de delante. Los puntos de la derecha tienen las mismas cifras que los de la izquierda, con los dos primeros números intercambiados. A continuación, manteniendo la cifra de 0 *l* , supongamos que el cubo que tenemos ante nosotros representa una sección a una distancia de 2 en la dirección *h* . Consideremos todos los puntos que contiene como puntos de 2 *h* . Luego tenemos una región de 0 *l* , 2 *h* , y nos sobran los conjuntos *ijk* y 431. Luego debemos seleccionar de acuerdo con nuestra regla todos los puntos como 4 *i* , 3 *j* , 1 *k* .

Estos se muestran en la figura y comprobamos que podemos dibujarlos sin confusión, formando el segundo hexágono desde el frente. Siguiendo de esta manera se verá que en cada una de las cinco figuras se selecciona un conjunto de hexágonos, que juntos forman una figura de tres espacios algo así como el tetracaidecágono.

[Página 134]

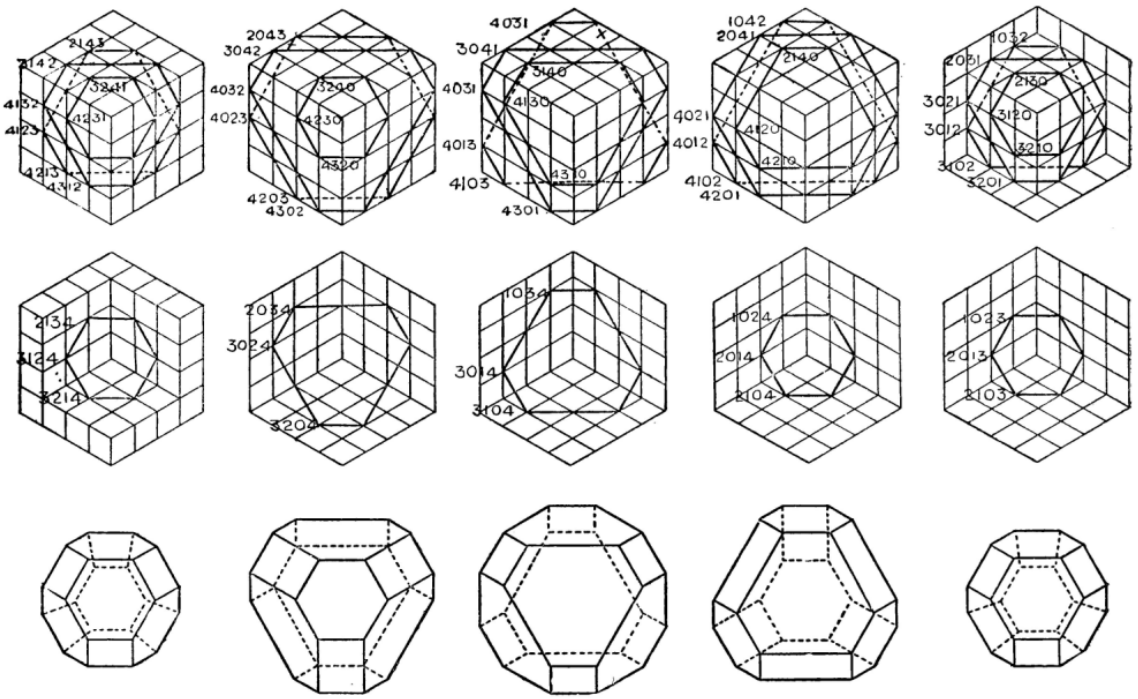


Figura 76.

[Página 135]

Estas figuras separadas son las etapas sucesivas en las que se puede aprehender toda la figura tetradimensional en la que se unen.

La primera figura y la última son tetracaidecágonos. Estos son dos de los límites sólidos de la figura. Los otros límites sólidos se pueden trazar fácilmente. Algunos de ellos están completos desde una cara de la figura hasta la cara correspondiente de la siguiente, como por ejemplo el sólido que se extiende desde la base hexagonal de la primera figura hasta la base hexagonal igual de la segunda figura. Este tipo de límite es un prisma hexagonal. El prisma hexagonal también aparece en otra serie de secciones, como por ejemplo, en el cuadrado en la parte inferior de la primera figura, el oblongo en la base de la segunda y el cuadrado en la base de la tercera figura.

Se pueden trazar otros límites sólidos a través de cuatro de las cinco figuras seccionales. Así, tomando el hexágono en la parte superior de la primera figura, encontramos en la siguiente también un hexágono, del cual algunos lados alternos son alargados. La parte superior de la tercera figura también es un hexágono con el otro conjunto de reglas alternativas alargadas, y finalmente llegamos en la cuarta figura a un hexágono regular.

Estas cuatro secciones son las secciones de un tetracaidecágono como se puede reconocer por las secciones de esta figura que hemos tenido anteriormente. Por tanto, los límites son de dos tipos: prismas hexagonales y tetracaidecágonos.

Estas figuras de cuatro dimensiones llenan exactamente el espacio de cuatro dimensiones mediante repeticiones iguales de sí mismas.

CAPÍTULO XI

[Página 136]

NOMENCLATURA Y ANALOGÍAS PRELIMINARES AL ESTUDIO DE LAS FIGURAS CUATRODIMENSIONALES

En las páginas siguientes se ha adoptado un método para designar diferentes regiones del espacio mediante una combinación de colores sistemática. Las explicaciones se han dado de tal manera que no implican ninguna referencia a modelos; los diagramas se considerarán suficientes. Pero para facilitar el estudio se incluye en un apéndice una descripción de un conjunto de modelos que el lector puede realizar por sí mismo u obtener. Si se utilizan modelos los diagramas de los Capítulos XI. y XII. formará una guía suficiente para indicar su uso. Se deben seleccionar cubos de los colores designados por los diagramas y utilizarlos para reforzar los diagramas. El lector, en la siguiente descripción, debe suponer que frente a él se extiende un tablero o pared, contra el cual se colocan las figuras.

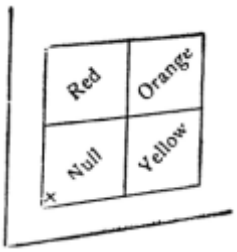


Figura 77.

Tome un cuadrado, uno de los que se muestran en la Fig. 77 y asígnele un color neutro; llamemos a este color "nulo" y sea tal que no suponga una diferencia apreciable. a cualquier color con el que se mezcle. Si no existe tal color real, imaginemos tal color y asignémosle las propiedades del número cero, lo que no hace diferencia en ningún número al que se suma.

[Página 137]

Encima de este cuadrado coloca un cuadrado rojo. Así simbolizamos el ascenso agregando rojo a nulo.

Lejos de este cuadrado nulo, coloque un cuadrado amarillo y represente el alejamiento agregando amarillo al nulo.

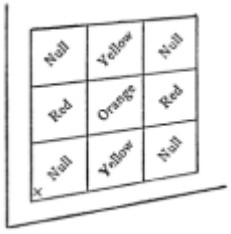


Figura 78.

Para completar la figura necesitamos un cuarto cuadrado. Colorea este naranja, que es una mezcla de rojo y amarillo, y por lo tanto representa apropiadamente un ir en una dirección compuesta de arriba y lejos. Tenemos así una combinación de colores que nos servirá para nombrar el conjunto de cuadrados dibujados. Tenemos dos ejes de colores, rojo y amarillo, y pueden ocupar, como en la figura, la dirección hacia arriba y hacia afuera, o pueden girarse; en cualquier caso nos permiten nombrar los cuatro cuadrados dibujados en su relación entre sí.

Ahora tome, en la Fig. 78, nueve cuadrados y suponga que al final del recorrido en cualquier dirección el color con el que empezó se repite.

Obtenemos un cuadrado llamado como se muestra.

Veamos ahora, en la fig. 79 , supongamos que se debe aumentar el número de cuadrados, respetando el principio de coloración ya utilizado.

Aquí los nulos siguen siendo cuatro. Hay tres rojos entre el primer nulo y el nulo encima, tres amarillos entre el primer nulo y el nulo más allá de él, mientras que las naranjas aumentan de forma doble.

[Página 138]

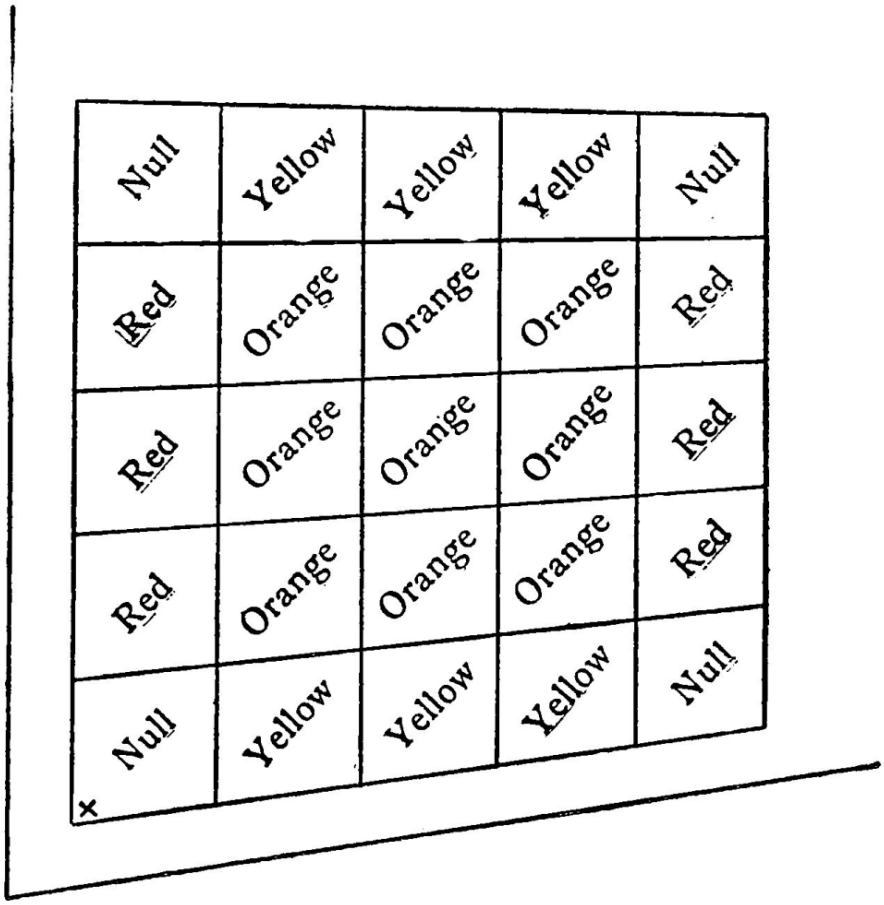


Figura 79.

Supongamos que se va a seguir indefinidamente este proceso de aumentar el número de cuadrados y reducir el tamaño de la figura total obtenida, obtendríamos un cuadrado cuyo interior fuera todo naranja, mientras que las líneas alrededor de él serían rojas y amarillas, y simplemente los puntos de color nulo, como en la fig. 80 . Así todos los puntos, rectas y el área tendrían un color.

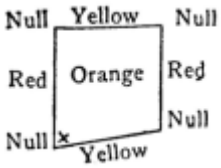


Figura 80.

Podemos considerar que este esquema se origina así: Dejemos que un punto nulo se mueva en una dirección amarilla y trace una línea amarilla y termine en un punto nulo. Luego deje que toda la línea así trazada se mueva en dirección roja. Los puntos nulos en los extremos de la línea producirán líneas rojas y terminarán en puntos nulos. La línea amarilla trazará un cuadrado amarillo y rojo o naranja. [Página 139]

Ahora, volviendo a la fig. 78 , vemos que estas dos formas de nombrar, la que empezamos y la que llegamos, se pueden combinar.

Por su posición en el grupo de cuatro cuadrados, en la fig. 77 , el cuadrado nulo tiene una relación con las direcciones amarilla y roja. Por lo tanto, podemos hablar de la línea roja del cuadrado nulo sin confusión, es decir, la línea AB , fig. 81 , que sube desde el punto nulo inicial A en la figura dibujada. La línea amarilla del cuadrado nulo es su línea horizontal inferior AC tal como está situada en la figura.

Si deseamos denotar la línea amarilla superior BD , fig. 81 , podemos hablar de ella como la línea amarilla γ, es decir, la línea amarilla que está separada de la línea amarilla primaria por el movimiento rojo.

De manera similar, cada uno de los otros cuadrados tiene puntos nulos, líneas rojas y amarillas. Aunque el cuadrado amarillo es todo amarillo, su línea CD , por ejemplo, puede denominarse línea roja.

Esta nomenclatura puede ampliarse.

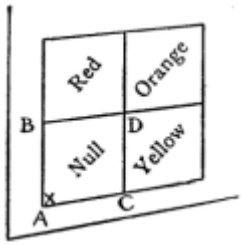


Figura 81.

Si los ocho cubos dibujados, en la fig. 82 , se ponen muy juntos, como en el lado derecho del diagrama, forman un cubo, y en ellos, así dispuestos, se representa un ascenso añadiendo rojo al cero, o color nulo, un alejamiento añadiendo amarillo, yendo hacia la derecha agregando blanco. El blanco se utiliza como color, como pigmento, lo que produce un cambio de color en los pigmentos con los que se mezcla. Desde cualquier cubo del conjunto inferior que comencemos, un movimiento hacia arriba nos lleva a un cubo que muestra un cambio a rojo, por lo que el amarillo claro se convierte en rojo amarillo claro o naranja claro, que se llama ocre. Y yendo al a la derecha del nulo a la izquierda tenemos un cambio que implica la introducción del blanco, mientras que el cambio amarillo va de adelante hacia atrás. Hay tres ejes de color (el rojo, el blanco y el amarillo) y estos discurren en la posición que ocupan los cubos en el dibujo (arriba, a la derecha, lejos), pero se pueden girar para ocupar cualquier posición en el espacio.

[Página 140]

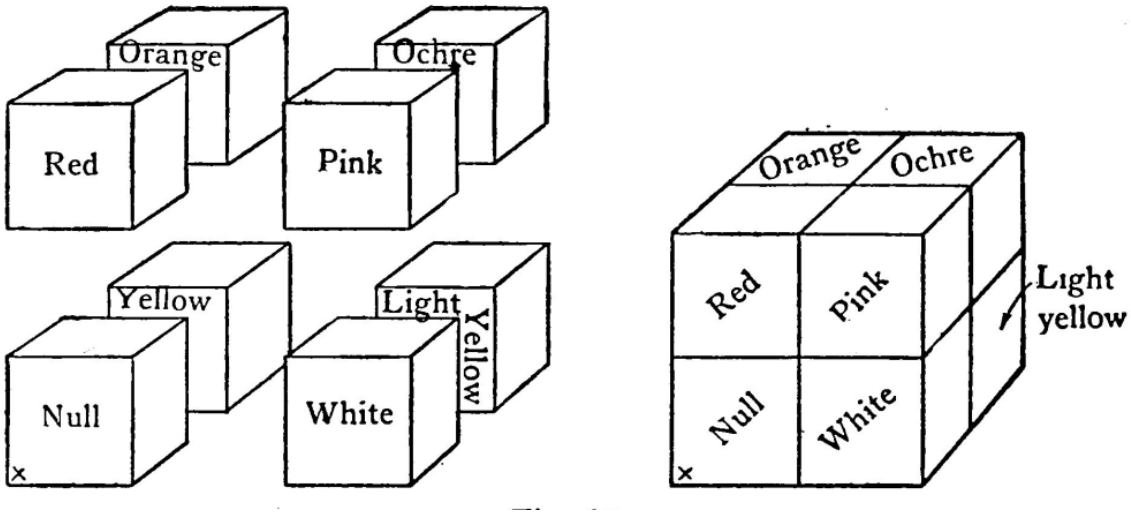


Figura 82.

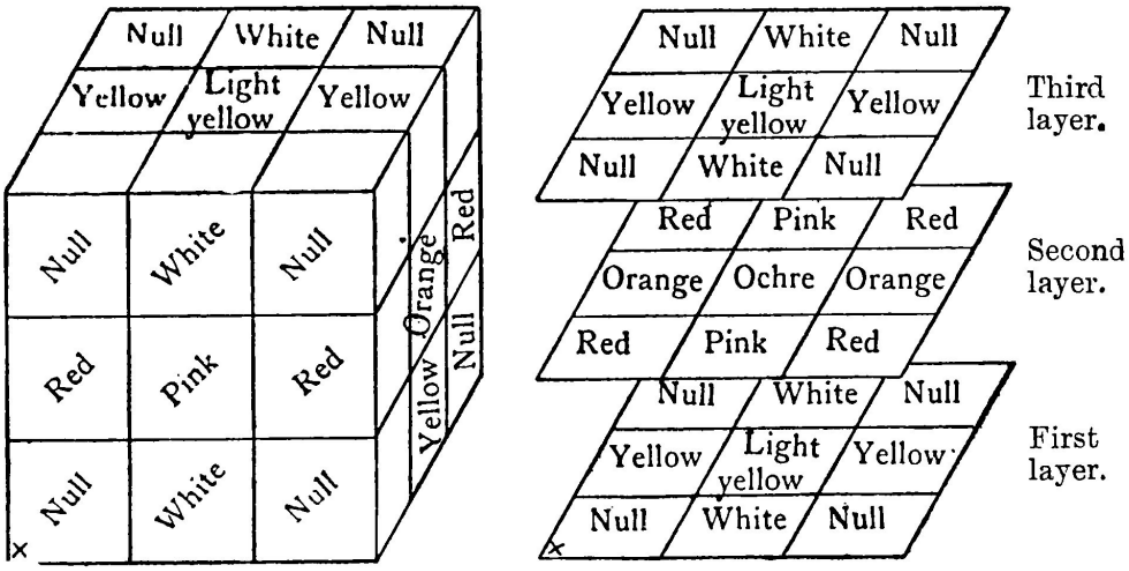


Figura 83.

Podemos representar convenientemente un bloque de cubos mediante tres conjuntos de cuadrados, cada uno de los cuales representa la base de un cubo.

Así, el bloque, fig. 83 , puede representarse por el capas a la derecha. Aquí, como en el caso del avión, los colores iniciales se repiten al final de la serie.

[Página 141]

Procediendo ahora a aumentar el número de cubos obtenemos fig. 84 , en el que se dan las letras iniciales de los colores en lugar de sus nombres completos.

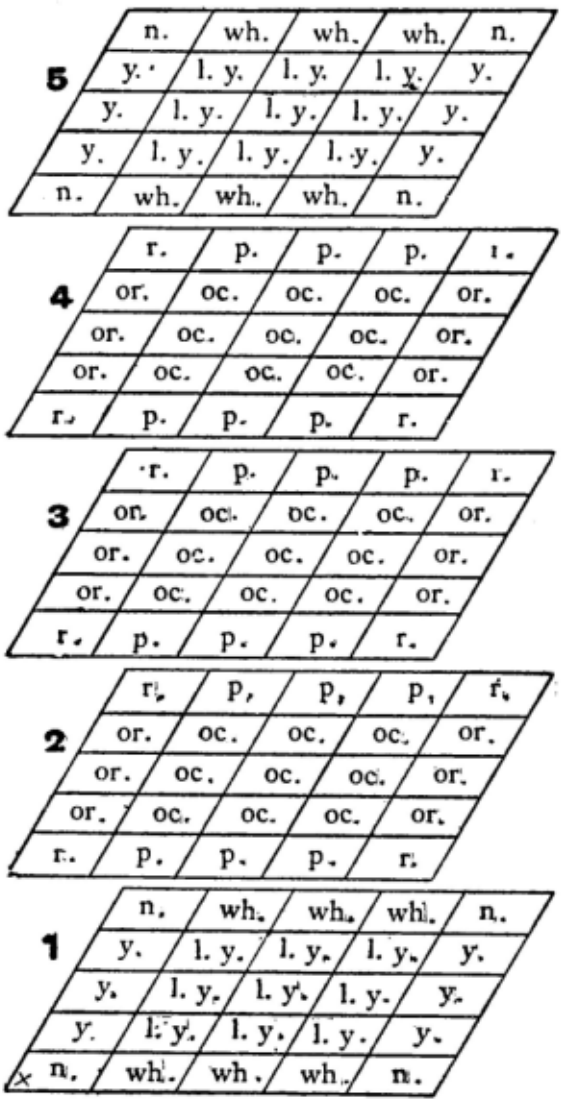


Figura 84.

Aquí vemos que hay cuatro cubos nulos como antes, pero las series que surgen de la esquina inicial tenderán a convertirse en líneas de cubos, como también los conjuntos de cubos paralelos a ellas, partiendo de otras esquinas. Así, del nulo inicial surge una línea de cubos rojos, una línea de cubos blancos y una línea de cubos amarillos.

Si el número de cubos aumenta considerablemente y el tamaño de todo el cubo disminuye, obtenemos un cubo con puntos nulos y las aristas coloreadas con estos tres colores.

Los cubos de color amarillo claro aumentan de dos maneras, formando finalmente una hoja de cubos, y lo mismo ocurre con los conjuntos de naranja y rosa. Por lo tanto, en última instancia, el cubo Así formado tendría líneas rojas, blancas y amarillas rodeando caras rosadas, naranjas y amarillas claras. Los cubos ocres aumentan de tres maneras y, por lo tanto, en última instancia, todo el interior del cubo sería de color ocre. [Página 142]

Tenemos así una nomenclatura para los puntos, líneas, caras y contenido sólido de un cubo, y se puede nombrar como se muestra en la fig. 85 .

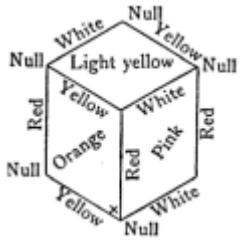


Figura 85.

Podemos considerar que el cubo se producirá de la siguiente manera. Un punto nulo se mueve en una dirección a la que le asignamos la indicación de color amarillo; genera una línea amarilla y termina en un punto nulo. La línea amarilla así generada se mueve en una dirección a la que le damos la indicación de color rojo. Esto se encuentra en la figura. La línea amarilla traza un cuadrado amarillo, rojo o naranja, y cada uno de sus puntos nulos traza una línea roja y termina en un punto nulo.

Este cuadrado naranja se mueve en una dirección a la que le atribuimos la indicación de color blanco, en este caso la dirección es la derecha. El cuadrado traza un cubo de color naranja, rojo u ocre, las líneas rojas trazan cuadrados de rojo a blanco o rosa, y las líneas amarillas trazan cuadrados de color amarillo claro, cada línea termina en una línea de su propio color. Mientras que cada uno de los puntos traza una línea nula + blanca, o blanca, para terminar en un punto nulo.

Ahora, volviendo al primer bloque de ocho cubos, podemos nombrar cada punto, línea y cuadrado en ellos con referencia a la combinación de colores, que determinan por su relación entre sí.

Así, en la fig. 86 , el cubo nulo toca el cubo rojo por un cuadrado amarillo claro; toca el cubo amarillo por un cuadrado rosa y toca el cubo blanco por un cuadrado naranja. [Página 143]

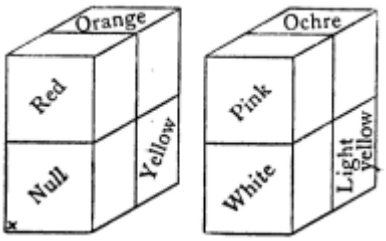


Figura 86.

Hay tres ejes a los que se asignan los colores rojo, amarillo y blanco, las caras de cada cubo se designan tomando estos colores por parejas. Tomando todos los colores juntos obtenemos un nombre de color para la solidez de un cubo.

Preguntémonos ahora cómo podría presentarse el cubo al ser plano. Sin entrar en la cuestión de cómo podría tener una experiencia real de ello, veamos cómo, si pudiéramos darle la vuelta y mostrárselo, él, bajo sus limitaciones, podría obtener información al respecto. Si el cubo se colocara con sus ejes rojo y amarillo contra un plano, es decir apoyado contra él por su cara naranja, el plano observaría un cuadrado rodeado de líneas rojas y amarillas, y con puntos nulos. Vea el cuadrado punteado, fig. 87 .

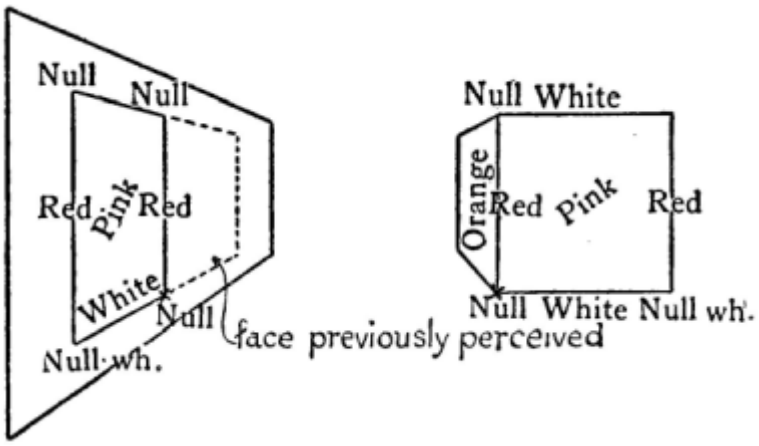


Figura 87.

Podríamos girar el cubo alrededor de la línea roja para que una cara diferente quede yuxtapuesta con el plano.

Supongamos que el cubo gira alrededor de la línea roja. Como lo está girando desde su primera posición, todo, excepto la línea roja, abandona el avión; sale absolutamente del alcance de la aprehensión del ser plano. Pero cuando la línea amarilla apunta directamente desde el avión, la cara rosada entra en contacto con ella. Así queda la misma línea roja como la vio al principio, ahora hacia él viene un rostro rodeado de líneas blancas y rojas. [Página 144]

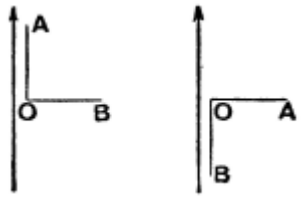


Figura 88.

Si llamamos a la dirección hacia la derecha dirección desconocida, entonces la línea que vio antes, la línea amarilla, sale en esta dirección desconocida, y la línea que antes iba en la dirección desconocida, entra. Viene en la dirección opuesta. dirección a aquella en la que discurría antes la línea amarilla; el interior de la cara ahora contra el avión es rosado. Es una propiedad de dos líneas en ángulo recto que, si una sale de una dirección dada y se coloca en ángulo recto con ella, entonces la otra de las dos líneas entra, pero corre en dirección opuesta en esa dirección dada, como en higo. 88 .

Ahora bien, estas dos presentaciones del cubo le parecerían a la criatura plana cuerpos materiales perfectamente diferentes, con sólo esa línea en común en la que ambos se encuentran.

De nuevo nuestro cubo puede girarse alrededor de la línea amarilla. En este caso, el cuadrado amarillo desaparecería como antes, pero un nuevo cuadrado entraría en el plano

después de que el cubo hubiera girado un ángulo de 90° alrededor de esta línea. El cuadrado inferior del cubo entraría así en la figura 89. El cubo supuesto en contacto con el plano se gira alrededor de la línea amarilla inferior y luego la cara inferior queda en contacto con el plano.

Aquí, como antes, la línea roja que sale a la dimensión desconocida, la línea blanca que antes corría en el La dimensión desconocida entraría hacia abajo en el sentido opuesto al que tenía antes la línea roja. [Página 145]

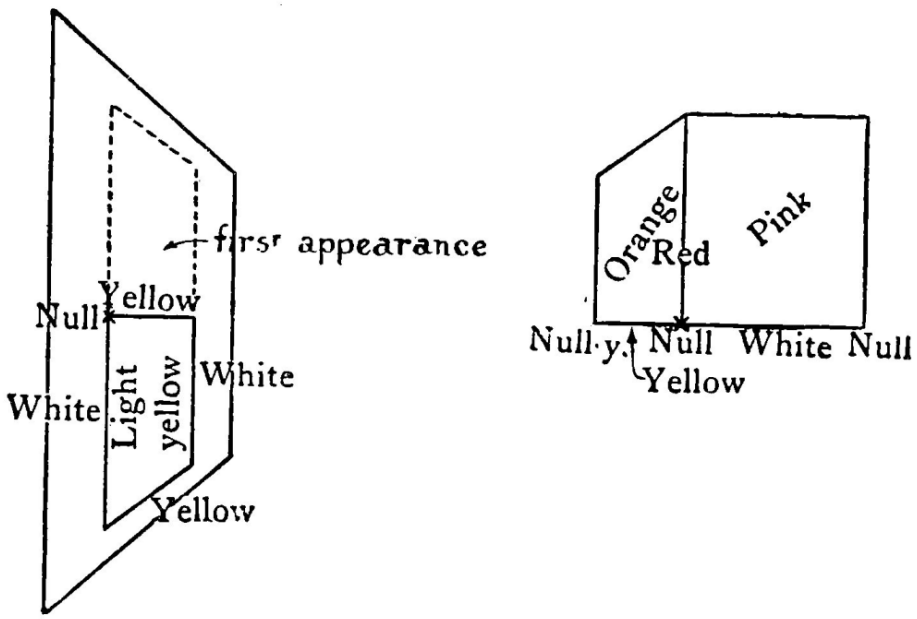


Figura 89.

Ahora, si usamos *i* , *j* , *k* , para las tres direcciones del espacio, *i* de izquierda a derecha, *j* de cerca a lejos, *k* de abajo hacia arriba; luego, usando los nombres de los colores para los ejes, tenemos que, en primer lugar, los tramos blancos *i* , los amarillos *j* , los rojos *k* ; luego, después del primer giro alrededor del eje *k* , el blanco corre *j* negativo , el amarillo corre *i* , el rojo corre *k* ; así tenemos la tabla:—

	i	*j*	*k*
1ra posición	blanco	amarillo	rojo
2da posición	amarillo	blanco-	rojo
3ra posición	rojo	amarillo	blanco-

Aquí, el blanco con un signo negativo después en la columna debajo de *j* significa que el blanco corre en el sentido negativo de la dirección *j* .

Podemos expresar el hecho de la siguiente manera: En el plano hay espacio para dos ejes mientras que el cuerpo tiene tres. Por tanto en el plano podemos representar dos cualesquiera. Si queremos mantener el eje que va en la dimensión desconocida siempre corriendo en sentido positivo, entonces el eje que originalmente corría en la dimensión desconocida La dimensión (el eje blanco) debe entrar en el sentido negativo de ese eje que sale del plano hacia la dimensión desconocida. [Pág. 146]

It is obvious that the unknown direction, the direction in which the white line runs at first, is quite distinct from any direction which the plane creature knows. The white line may come in towards him, or running down. If he is looking at a square, which is the face of a cube (looking at it by a line), then any one of the bounding lines remaining unmoved, another face of the cube may come in, any one of the faces, namely, which have the white line in them. And the white line comes sometimes in one of the space directions he knows, sometimes in another.

Now this turning which leaves a line unchanged is something quite unlike any turning he knows in the plane. In the plane a figure turns round a point. The square can turn

round the null point in his plane, and the red and yellow lines change places, only of course, as with every rotation of lines at right angles, if red goes where yellow went, yellow comes in negative of red's old direction.

This turning, as the plane creature conceives it, we should call turning about an axis perpendicular to the plane. What he calls turning about the null point we call turning about the white line as it stands out from his plane. There is no such thing as turning about a point, there is always an axis, and really much more turns than the plane being is aware of.

Taking now a different point of view, let us suppose the cubes to be presented to the plane being by being passed transverse to his plane. Let us suppose the sheet of matter over which the plane being and all objects in his world slide, to be of such a nature that objects can pass through it without breaking it. Let us suppose it to be of the same nature as the film of a soap bubble, so that it closes around objects pushed through it, and, however the object alters its shape as it passes through it, let us suppose this film to run up to the contour of the object in every part, maintaining its plane surface unbroken. [Pg 147]

Then we can push a cube or any object through the film and the plane being who slips about in the film will know the contour of the cube just and exactly where the film meets it.

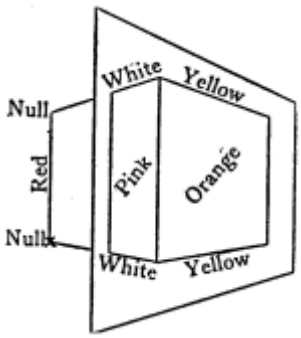


Fig. 90.

Fig. 90 represents a cube passing through a plane film. The plane being now comes into contact with a very thin slice of the cube somewhere between the left and right hand faces. This very thin slice he thinks of as having no thickness, and consequently his idea of it is what we call a section. It is bounded by him by pink lines front and back, coming from the part of the pink face he is in contact with, and above and below, by light yellow lines. Its corners are not null-coloured points, but white points, and its interior is ochre, the colour of the interior of the cube.

Si ahora suponemos que el cubo tiene una pulgada en cada dimensión y pasa, de derecha a izquierda, a través del plano, entonces deberíamos explicar las apariencias que se presentan al plano diciendo: Primero que nada, tienes la cara de un cubo, esto dura sólo un momento; entonces tienes una figura de la misma forma pero de diferente color. Esto, que parece no moverse hacia ustedes en ninguna dirección que ustedes conozcan, en realidad se está moviendo transversalmente a su mundo plano. Su apariencia es inalterada, pero cada momento es algo diferente: un tramo más allá, en el blanco, la dimensión desconocida. Finalmente, al Al final del minuto, aparece una cara exactamente igual a la que viste por primera vez. Esto completa el cubo: es la cara más alejada de la dimensión desconocida. [Página 148]

La línea blanca, que se extiende en longitud igual que la roja o la amarilla, no la ves tan extensa; lo percibes simplemente como un punto blanco duradero. El punto nulo, bajo la condición de movimiento del cubo, desaparece en un momento, el punto blanco duradero es en realidad tu percepción de una línea blanca que corre en una dimensión desconocida. De la misma manera que la línea roja de la cara por la que el cubo entra en contacto por primera vez con el plano dura sólo un momento, es seguida por la línea rosa, y esta línea rosa dura el interior de un minuto. Esta línea rosa duradera en tu percepción de una superficie, que se extiende en dos dimensiones al igual que la superficie naranja se extiende, como la conoces, cuando el cubo está en reposo.

Pero la criatura plana podría responder: "Este objeto naranja es sustancia, sustancia sólida, completamente limitada por todos lados".

Aquí, por supuesto, surge la dificultad. Su sólido es nuestra superficie; su noción de sólido es nuestra noción de una superficie abstracta sin espesor alguno.

Habría que explicarle que de cada punto de lo que él llamaba un sólido se escapa una nueva dimensión. Desde cada punto se puede trazar una línea en una dirección desconocida para él, y hay una solidez de un tipo mayor que el que conoce. Esta solidez sólo puede ser realizada por él suponiendo una dirección desconocida, mediante un movimiento en el que lo que él concibe como materia sólida desaparece instantáneamente. Sin embargo, el sólido superior, que se extiende tanto en esta dimensión como en aquellas que él conoce, dura cuando se produce un movimiento de este tipo, diferentes secciones de él entran consecutivamente en el plano de su aprehensión y ocupan el lugar del sólido. que al principio concibe que es todo. Así, el sólido superior (nuestro El sólido, a diferencia de su sólido espacial, su sólido bidimensional, debe ser concebido por él como algo que tiene duración en él, en circunstancias en las que su materia desaparece de su mundo. [Página 149]

Podemos plantear la cuestión así, utilizando la concepción de movimiento.

Un punto nulo que se mueve en una dirección alejada genera una línea amarilla, y la línea amarilla termina en un punto nulo. Supongamos, es decir, un punto para moverse y marcar los productos de este movimiento de tal manera. Supongamos ahora que toda esta línea así producida se mueve en dirección ascendente; traza el sólido bidimensional y el plano adquiere un cuadrado naranja. El punto nulo se mueve en una línea roja y termina en un punto nulo, la línea amarilla se mueve y genera un cuadrado naranja y termina en una línea amarilla, el punto nulo más lejano genera una línea roja y termina en un punto nulo. Así, mediante el movimiento en dos direcciones sucesivas que conoce, puede imaginar su sólido bidimensional producido con todos sus límites.

Ahora le decimos: “Todo este sólido bidimensional puede moverse en una tercera dimensión o desconocida para ti. El punto nulo que se mueve en esta dimensión fuera de su mundo genera una línea blanca y termina en un punto nulo. La línea amarilla que se mueve genera un sólido bidimensional de color amarillo claro y termina en una línea amarilla, y este sólido bidimensional, que se encuentra al final de su mundo plano, está limitado en el otro lado por la otra línea amarilla. De la misma manera, cada una de las líneas que rodean tu cuadrado traza un área, igual que el área naranja que conoces. Pero se está produciendo algo nuevo, algo de lo que no tenías idea antes; es el que se produce por el movimiento del cuadrado naranja. Eso, que no se puede imaginar nada más sólido, se mueve en una dirección abierta a él y produce una tridimensionalidad. sólido. Usando la adición de blanco para simbolizar los productos de este movimiento, este nuevo tipo de sólido será de color naranja claro u ocre, y estará limitado en el lado opuesto por la posición final del cuadrado naranja que lo trazó, y esta posición final Suponemos que debe tener el color del cuadrado en su primera posición, naranja con límites amarillos y rojos y esquinas nulas”. [Página 150]

Este producto del movimiento, que nos resulta tan fácil describir, le resultaría difícil de concebir. Pero esta dificultad está más relacionada con su totalidad que con una parte particular de ella.

Cualquier línea, o plano de éste, más elevado, sólido podríamos mostrarle, y poner en su mundo sensible.

Ya hemos visto cómo el cuadrado rosa podría colocarse en su mundo girando el cubo alrededor de la línea roja. Y se le podría exhibir cualquier sección que podamos concebir hecha del cubo. Simplemente tienes que girar el cubo y empujarlo, de modo que el plano de su existencia sea el plano que corta la sección dada del cubo, entonces la sección le parecerá un sólido. En su mundo vería el contorno y llegaría a cualquier parte excavando en él.

El proceso por el cual un ser plano adquiriría la noción de sólido.

Si suponemos que el ser plano tiene una idea general de la existencia de un sólido superior (nuestro sólido), a continuación debemos trazar en detalle el método, la disciplina mediante la cual adquiriría una familiaridad práctica con nuestra existencia espacial. El proceso comienza con la realización adecuada de una figura sólida simple. Para ello supondremos ocho cubos que forman un cubo más grande, y primero supondremos que cada cubo está coloreado uniformemente. Deje que los cubos en la fig. 91 sean los ocho formando un cubo más grande. [Página 151]

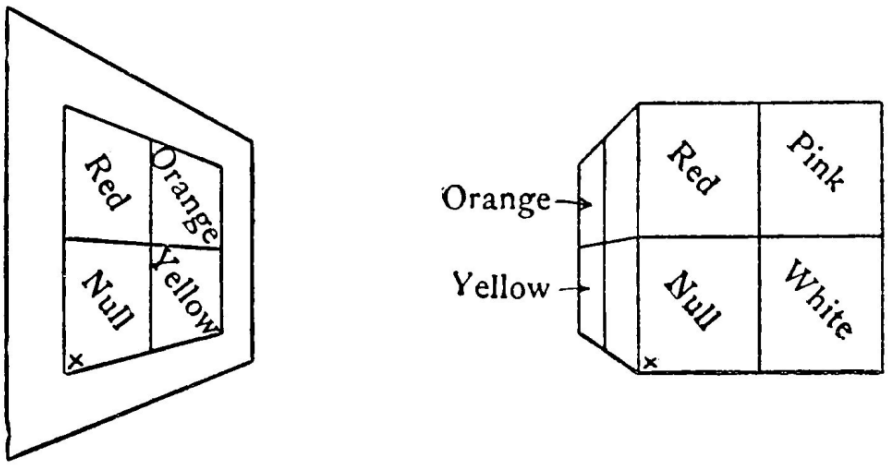


Figura 91.

Ahora bien, aunque se supone que cada cubo está completamente coloreado con el color cuyo nombre está escrito en él, todavía podemos hablar de las caras, aristas y esquinas de cada cubo como si el esquema de color que hemos investigado fuera válido para todos. él. Así, en el cubo nulo podemos hablar de un punto nulo, una línea roja, una línea blanca, una cara rosa, etc. Estas designaciones de colores se muestran en el número 1 de las vistas del teseracto en la placa. Aquí estos nombres de colores se utilizan simplemente en su significado geométrico. Indican lo que tendría como color la línea particular, etc., a la que se hace referencia, si en referencia al cubo particular se llevara a cabo el esquema de color descrito anteriormente.

Si tal bloque de cubos se colocara contra el avión y luego se pasara a través de él de derecha a izquierda, a razón de una pulgada por minuto, teniendo cada cubo una pulgada en cada sentido, el avión tendría las siguientes apariencias:

En primer lugar, cuatro cuadrados nulos, amarillo, rojo, naranja, de un minuto de duración cada uno; y en segundo lugar, tomando el lugar exacto de estos cuatro cuadrados, otros cuatro, de color blanco, amarillo claro, rosa, ocre. Así, para hacer un catálogo del cuerpo sólido, tendría que poner uno al lado del otro en su mundo dos conjuntos de cuatro cuadrados cada uno, como en la fig. 92 . La primera se supone que duran un minuto, y luego los demás entran en su lugar, y también duran un minuto. [Página 152]

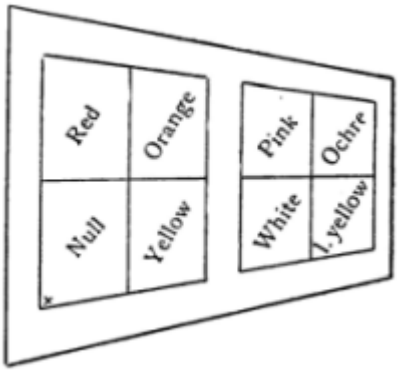


Figura 92.

Al hablar de ellos tendría que indicar qué parte del cubo respectivo representa cada cuadrado. Por lo tanto, al principio tendría una cara naranja del cubo nulo, y una vez iniciado el movimiento tendría una sección ocre del cubo nulo. Como podría obtener la misma sección de color en cualquier dirección por la que pasara el cubo, sería mejor para él llamar a esta sección sección blanca, lo que significa que es transversal al eje blanco. Estos nombres de colores, por supuesto, se utilizan simplemente como nombres y no implican en este caso que el objeto esté

realmente coloreado. Finalmente, después de un minuto, cuando el primer cubo pasaba más allá de su plano, volvería a tener la cara naranja del cubo nulo.

Los mismos nombres se aplicarán a cada uno de los demás cubos, describiendo qué cara o sección de ellos tiene el ser plano ante él; y la segunda pared de cubos se pondrá, continuará y se apagará de la misma manera. En el área que tiene así puede representar cualquier movimiento que realicemos en los cubos, siempre que no suponga un movimiento en dirección al eje blanco. La relación de partes que se suceden en la dirección del eje blanco es realizada por él como una consecución de estados.

Ahora bien, su medio para desarrollar su aprehensión espacial consiste en que lo que se representa como una secuencia temporal en una posición de los cubos, puede convertirse en una coexistencia real, *si algo que tiene una coexistencia real se convierte en una secuencia temporal.* .

Debemos suponer que los cubos giran alrededor de cada uno de los ejes, la línea roja y la línea amarilla, entonces algo que antes era dado como tiempo, ahora será dado como el espacio de la criatura plana; algo que antes se daba como espacio, ahora se dará como una serie de tiempo a medida que el cubo pasa a través del plano. [Página 153]

Las tres posiciones en las que se deben estudiar los cubos son la dada arriba y las dos siguientes. En cada caso, el punto nulo original que estaba más cerca de nosotros al principio está marcado con un asterisco. En los higos. 93 y 94 el punto marcado con una estrella es el mismo en los cubos y en la vista en plano.

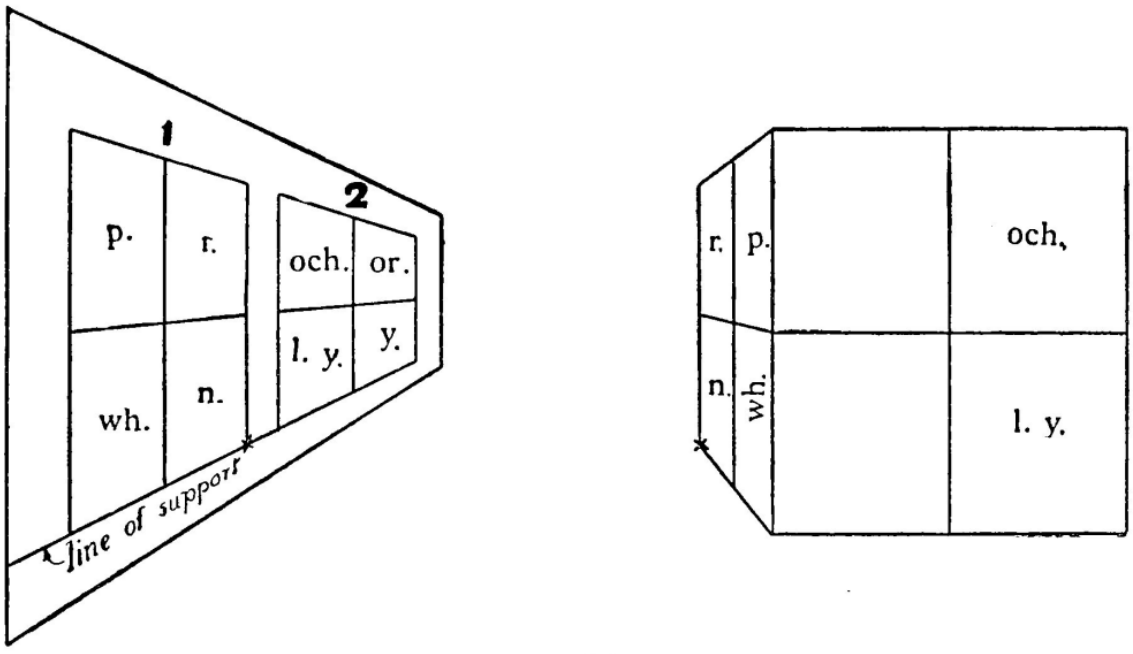


Fig. 93.
El cubo giró alrededor de la línea roja, de modo que la línea blanca apunta hacia nosotros.

En la Fig. 93 el cubo gira alrededor de la línea roja para que apunte hacia nosotros y, en consecuencia, la cara rosada queda al lado del avión. A su paso hay dos variedades de apariencia designadas por las figuras 1 y 2 en el plano. Estas apariencias se nombran en la figura y están determinadas por el orden en que los cubos vienen en el movimiento de todo el bloque a través del avión. [Página 154]

Sin embargo, respecto a estos cuadrados individualmente se deben utilizar nombres diferentes, determinados por sus relaciones en el bloque.

Así, en la fig. 93 , cuando el cubo se apoya por primera vez contra el plano, el cubo nulo está en contacto por su cara rosa; a medida que pasa el bloque obtenemos una sección ocre del cubo nulo, pero es mejor llamarla sección amarilla, ya que está formada por un plano perpendicular a la línea amarilla. Cuando el cubo nulo ha pasado por el plano, al salir de él, obtenemos nuevamente una cara rosa.

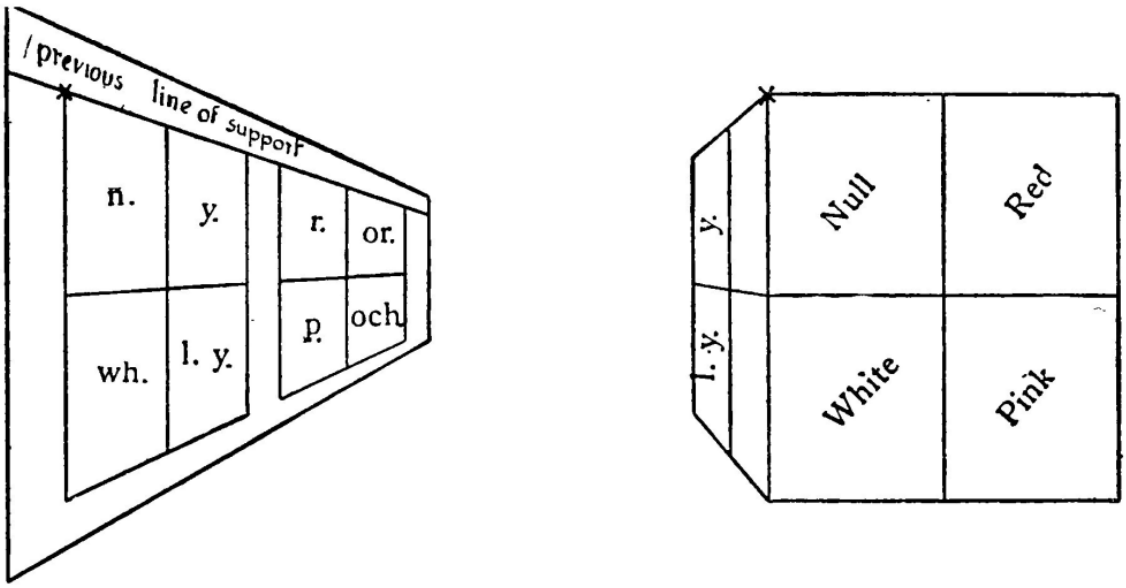


Fig. 94.
El cubo giró alrededor de la línea amarilla, con la línea roja corriendo de izquierda a derecha y la línea blanca corriendo hacia abajo.

La misma serie de cambios tiene lugar con las apariencias del cubo que siguen a las del cubo nulo. En este movimiento, el cubo amarillo sigue al cubo nulo, y el cuadrado marcado en amarillo en 2 en el plano será primero "cara amarilla rosada", luego "sección amarilla amarilla" y luego "cara amarilla rosada".

En la Fig. 94 , en el que el cubo gira alrededor de la línea amarilla, tenemos cierta dificultad, ya que el plano será descubre que la posición en la que se colocarán sus cuadrados estará debajo de la que ocuparon primero. Llegarán donde estuvo el soporte sobre el que apoyó su primer conjunto de escuadras. Superará esta dificultad moviendo su soporte. [Página 155]

Entonces, dado que los cubos llegan a su plano por la cara amarilla clara, tendrá, tomando el cubo nulo como antes como ejemplo, una cara nula, amarilla clara; nula, sección roja, porque la sección es perpendicular a la línea roja; y finalmente, cuando el cubo nulo sale del plano, cara nula de color amarillo claro. Entonces, en este caso, el rojo sigue a nulo, tendrá la misma serie de vistas del rojo que tuvo del cubo nulo.

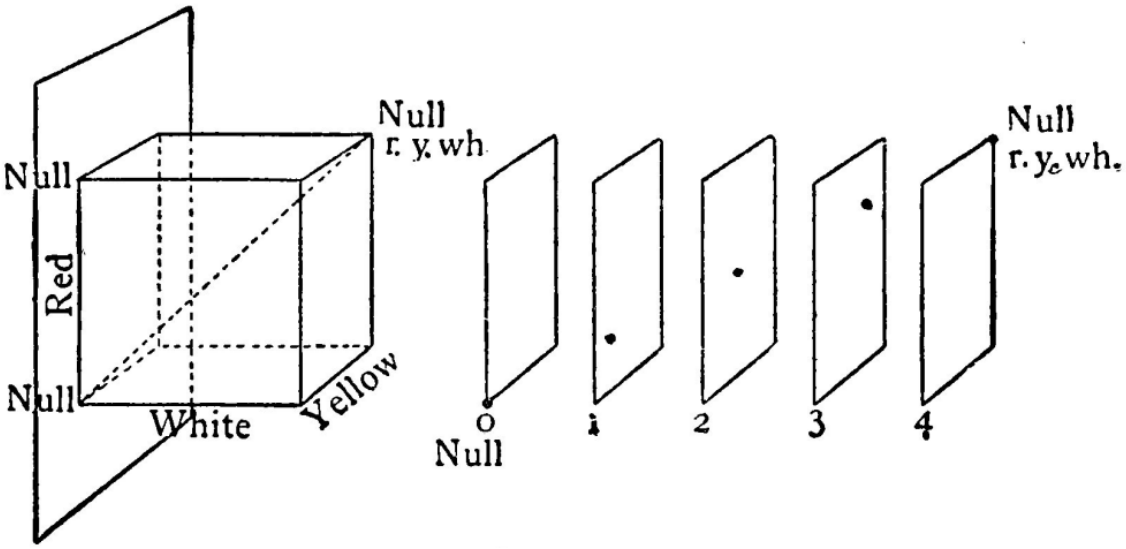


Figura 95.

Hay otro conjunto de consideraciones a las que aludiremos brevemente.

Supongamos que hay un cubo hueco y una cuerda se extiende a través de él de nulo a nulo, *r* , *y* , *wh* , como podemos llamar el punto más alejado de la diagonal, ¿cómo

aparecerá esta cuerda en el plano a medida que el cubo se mueve transversalmente a su ¿avión?

Representemos el cubo como un número de secciones, digamos 5, correspondientes a 4 divisiones iguales hechas a lo largo de la línea blanca perpendicular a él.

Numeramos estos tramos 0, 1, 2, 3, 4, correspondientes a las distancias a lo largo de la línea blanca en la que se encuentran. tomado, e imagine que cada sección viene sucesivamente, tomando el lugar de la anterior. [Página 156]

Estas secciones parecen al plano, contando desde la primera, coincidir exactamente cada una con la anterior. Pero la sección de la cuerda ocupa en cada una un lugar diferente al que ocupa en la sección anterior. La sección de la cuerda aparece en la posición marcada por los puntos. Por lo tanto, la inclinación de la cuerda aparece como un movimiento en el marco marcado por los lados del cubo. Si suponemos que el movimiento del cubo no se reconoce, entonces la cuerda aparece ante el plano como un punto en movimiento. De ahí que la extensión en la dimensión desconocida aparezca como duración. La extensión que se inclina en una dirección desconocida aparece como un movimiento continuo.

CAPÍTULO XII

EL SÓLIDO CUATRODIMENSIONAL MÁS SIMPLE

[Pág. 157]

A plane being, in learning to apprehend solid existence, must first of all realise that there is a sense of direction altogether wanting to him. That which we call right and left does not exist in his perception. He must assume a movement in a direction, and a distinction of positive and negative in that direction, which has no reality corresponding to it in the movements he can make. This direction, this new dimension, he can only make sensible to himself by bringing in time, and supposing that changes, which take place in time, are due to objects of a definite configuration in three dimensions passing transverse to his plane, and the different sections of it being apprehended as changes of one and the same plane figure.

He must also acquire a distinct notion about his plane world, he must no longer believe that it is the all of space, but that space extends on both sides of it. In order, then, to prevent his moving off in this unknown direction, he must assume a sheet, an extended solid sheet, in two dimensions, against which, in contact with which, all his movements take place.

When we come to think of a four-dimensional solid, what are the corresponding assumptions which we must make?

[Pg 158]

We must suppose a sense which we have not, a sense of direction wanting in us, something which a being in a four-dimensional world has, and which we have not. It is a sense corresponding to a new space direction, a direction which extends positively and negatively from every point of our space, and which goes right away from any space direction we know of. The perpendicular to a plane is perpendicular, not only to two lines in it, but to every line, and so we must conceive this fourth dimension as running perpendicularly to each and every line we can draw in our space.

And as the plane being had to suppose something which prevented his moving off in the third, the unknown dimension to him, so we have to suppose something which prevents us moving off in the direction unknown to us. This something, since we must be in contact with it in every one of our movements, must not be a plane surface, but a solid; it must be a solid, which in every one of our movements we are against, not in. It must be supposed as stretching out in every space dimension that we know; but we are not in it, we are against it, we are next to it, in the fourth dimension.

Es decir, así como el ser plano se concibe a sí mismo con un espesor muy pequeño en la tercera dimensión, del cual no es consciente en su experiencia sensorial, así también debemos suponernos con un espesor muy pequeño en la cuarta dimensión, y, siendo por lo tanto, seres cuatridimensionales, a los que no podemos darnos cuenta de que somos tales seres por una coacción que nos mantiene siempre en contacto con una vasta lámina sólida, que se extiende en todas direcciones. Estamos en contra de esa sábana, de modo que, si tuviéramos el poder del movimiento cuatridimensional, deberíamos alejarnos de ella o atravesarla; todos nuestros movimientos espaciales tal como los conocemos son tales que, al realizarlos, nos mantenemos en contacto con esta lámina sólida.

[Página 159]

Consideremos ahora la exposición que haría un ser plano. por sí mismo en cuanto a la cuestión del cerramiento de un cuadrado y de un cubo.

Diría que el cuadrado A , en la Fig. 96, está completamente encerrado por los cuatro cuadrados, A lejos, A cerca, A arriba, A ABAJO , o *como* están escritos AN , *Af* , AA , AB .

Si ahora concibe que el cuadrado A se mueve en una dimensión desconocida para él, trazará un cubo, y los cuadrados que lo delimitan formarán cubos. ¿Rodearán completamente el cubo generado por A ? No; quedarán descubiertas dos caras del cubo formado por A ; la primera, aquella cara que coincide con el cuadrado A en su primera

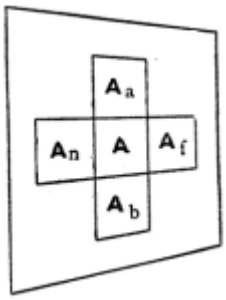


Figura 96.

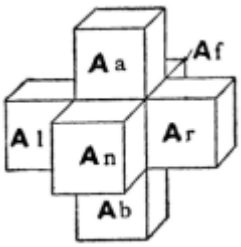


Figura 97.

posición; el siguiente, el que coincide con el cuadrado A en su posición final. Contra estas dos caras se deben colocar cubos para encerrar completamente el cubo A. *Estos pueden* denominarse cubos de izquierda y derecha *o* AL y AR . Así cada uno de los cuadrados que encierra el cuadrado A se convierte en un cubo y se necesitan dos cubos más para encerrar el cubo formado por el movimiento de A en la tercera dimensión.

El ser plano no pudo ver el cuadrado *A con los cuadrados An, Af* , etc. , colocados A *su* alrededor, porque lo ocultan completamente de la vista; y así nosotros, en el caso análogo de nuestro mundo tridimensional, no podemos ver un cubo A rodeado por otros seis cubos. A estos cubos los llamaremos A cerca *de An* , A LEJANO A F , A ARRIBA de A *a* , A debajo DE *Ab* , A izquierda A *l* , A derecha A *r* , como se muestra en la fig. 97 . Si ahora el cubo A sale del espacio en la cuarta dimensión, traza un cubo superior: un teseracto, como se le puede llamar.Cada uno de los seis cubos circundantes realizados en el mismo movimiento formarán también un teseracto, y estos se agruparán alrededor del teseracto formado por A. ¿Pero lo cerrarán por completo? [Página 160]

Todos los cubos AN , AF , etc., se encuentran en nuestro espacio . Pero no hay nada entre el cubo A y esa lámina sólida en contacto con la que está cada partícula de materia. Cuando el cubo A SE MUEVE EN LA CUARTA DIRECCIÓN , comienza desde su posición, digamos A *k* , y termina en una posición final AN (usando las palabras “ana” y “kata” para arriba y abajo en la cuarta dimensión). *Ahora bien* , el movimiento en esta cuarta dimensión no está limitado por ninguno de los cubos *An, Af* , ni POR lo que forman cuando se mueven así. El teseracto en el que se convierte A está limitado en forma positiva y negativa en esta nueva dirección por la primera posición de A Y la última posición de A. O, si preguntamos cuántos teseractos hay alrededor del teseracto que forma A , hay ocho, de los cuales uno se encuentra con el cubo A , y otro se encuentra con un cubo como A al final de su movimiento.

Llegamos aquí a algo muy curioso. Todo el cubo sólido A debe considerarse simplemente como un límite del teseracto.

Sin embargo, esto es exactamente análogo a lo que llegaría el ser plano en su estudio del mundo sólido. El cuadrado A (fig. 96), que el ser plano considera una existencia sólida en su mundo plano, es simplemente el límite del cubo que supone generado por su movimiento.

El hecho es que tenemos que reconocer que, si hay otra dimensión del espacio, nuestra idea actual de un cuerpo sólido, como uno que sólo tiene tres dimensiones, no corresponde a nada real, sino que es la idea abstracta de un cuerpo de tres dimensiones. Límite dimensional que limita un sólido de cuatro dimensiones, que formaría un ser de cuatro dimensiones. El pensamiento del ser plano sobre un cuadrado no es el pensamiento de lo que llamaríamos un cuadrado real posiblemente existente, sino la idea de un límite abstracto, la cara de un cubo. [Página 161]

Tomemos ahora nuestros ocho cubos de colores, que forman un cubo en el espacio, y preguntémonos qué adiciones debemos hacerles para representar la colección más simple de cuerpos de cuatro dimensiones, es decir, un grupo de ellos de la misma extensión en todas las direcciones. En el espacio plano tenemos cuatro cuadrados. En el espacio sólido tenemos ocho cubos. Por lo tanto, deberíamos esperar que en el espacio de cuatro dimensiones haya dieciséis cuerpos de cuatro dimensiones, cuerpos que en el espacio de cuatro dimensiones corresponden a cubos en el espacio de tres dimensiones, y a estos cuerpos los llamamos teseractos.

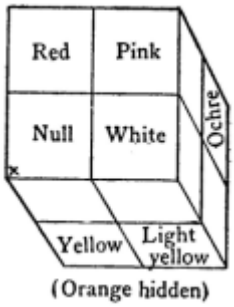


Figura 98.

Dados entonces los cubos nulos, blancos, rojos, amarillos y los que componen el bloque, notamos que representamos perfectamente la extensión en tres direcciones (fig. 98). Desde el punto nulo del cubo nulo, recorriendo una pulgada, llegamos al cubo blanco; viajando a una pulgada de distancia llegamos al cubo amarillo; subiendo una pulgada llegamos al cubo rojo. Ahora bien, si hay una cuarta dimensión, viajando desde el mismo punto nulo una pulgada en esa dirección, debemos llegar al cuerpo que se encuentra más allá de la región nula.

Digo región nula, no cubo; porque con la introducción de la cuarta dimensión cada uno de nuestros cubos debe convertirse en algo diferente de los cubos. Si han de tener existencia en la cuarta dimensión, deben ser "llenados desde" en esta cuarta dimensión.

Ahora asumiremos que a medida que obtenemos una transferencia de nulo a blanco yendo en una dirección, de nulo a amarillo yendo en otra, entonces yendo de nulo en la cuarta dirección tenemos una transferencia de nulo a azul, usando así el colores blanco, amarillo, rojo, azul, para denotar transferencias en cada una de las cuatro direcciones: derecha, lejos, arriba, desconocida o cuarta dimensión. [Página 162]

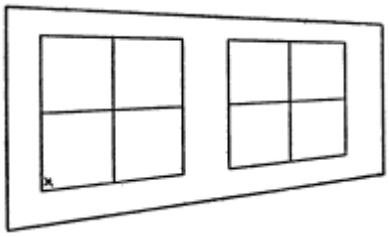


Fig. 99.
Representación en un ser plano de un bloque de ocho cubos por dos conjuntos de cuatro cuadrados.

Por lo tanto, como el ser plano debe representar las regiones sólidas, llegaría yendo a la derecha, como cuatro cuadrados que se encuentran en alguna posición en su plano, elegidos arbitrariamente, al lado de sus cuatro cuadrados originales, así debemos representar esos ocho cuatro. -regiones dimensionales, a las que deberíamos llegar yendo a la cuarta dimensión desde cada uno de nuestros ocho cubos, por ocho cubos colocados en alguna posición arbitraria en relación con nuestros primeros ocho cubos.

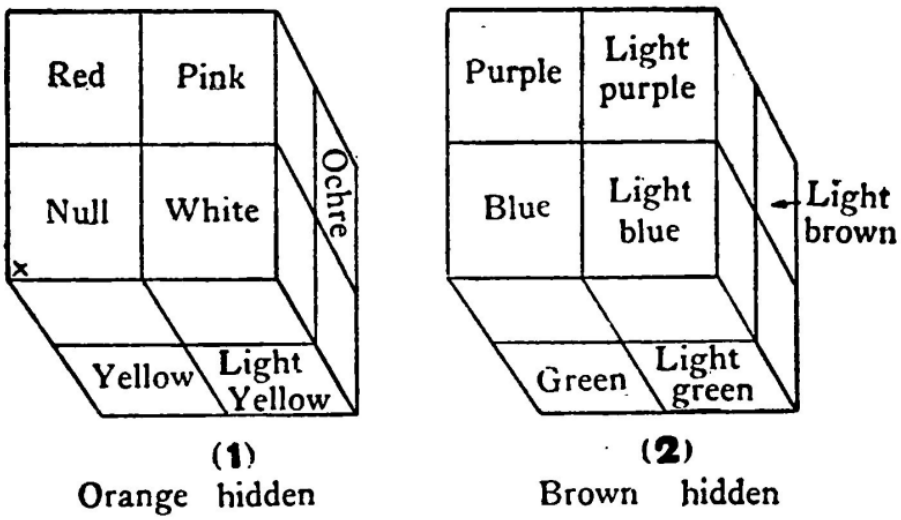


Figura 100.

Nuestra representación de un bloque de dieciséis teseractos por dos bloques de ocho cubos. [3]

[3] Los ocho cubos utilizados aquí en 2 se pueden encontrar en el segundo de

los bloques modelo. Se pueden sacar y utilizar.

Por lo tanto, de los dos conjuntos de ocho cubos, cada uno servirá nosotros como una representación de uno de los dieciséis teseractos que forman un solo bloque en el espacio de cuatro dimensiones. Cada cubo, tal como lo tenemos, es una bandeja, por así decirlo, contra la cual descansa la figura tetradimensional real, del mismo modo que cada uno de los cuadrados que tiene el ser plano es una bandeja, por así decirlo, contra la cual se apoya el cubo. representa podría descansar. [Página 163]

Si suponemos que los cubos miden una pulgada en cada sentido, entonces los ocho cubos originales darán ocho teseractos de los mismos colores, o los cubos, extendiéndose cada uno una pulgada en la cuarta dimensión.

Pero después de estos vienen, en la cuarta dimensión, otros ocho cuerpos, otros ocho teseractos. Estos deben estar allí, si suponemos que el cuerpo de cuatro dimensiones que formamos tiene dos divisiones, de una pulgada cada una en cada una de las cuatro direcciones.

El color que elegimos para designar la transferencia a esta segunda región en la cuarta dimensión es el azul. Así, partiendo del cubo nulo y avanzando hacia la cuarta dimensión, primero atravesamos una pulgada del teseracto nulo, luego llegamos a un cubo azul, que es el comienzo de un teseracto azul. Este teseracto azul se extiende una pulgada más allá en la cuarta dimensión.

Así, más allá de cada uno de los ocho teseractos, que son del mismo color que los cubos que son sus bases, se encuentran ocho teseractos cuyos colores se derivan de los colores de los ocho primeros añadiendo azul. De este modo-

Nulo	da	azul
Amarillo	"	verde
Rojo	"	púrpura
Naranja	"	marrón
Blanco	"	azul claro
Rosa	"	violeta claro
Amarillo claro	"	verde claro
Ocre	"	marrón claro

La adición de azul al amarillo da verde; este es un suposición natural de hacer. También es natural suponer que el azul añadido al rojo produce el violeta. Se puede hacer que el naranja y el azul den un color marrón, utilizando ciertos tonos y proporciones. Y se pueden hacer ocre y azul para dar un marrón claro. [Página 164]

Pero el esquema de colores se utiliza simplemente para obtener un conjunto definido y realizable de nombres y distinciones visibles al ojo. Su naturalidad es evidente para cualquiera que tenga el hábito de utilizar colores, y puede suponerse que es justificable, ya que el único propósito es idear un conjunto de nombres que sean fáciles de recordar y que nos proporcionen un conjunto de colores mediante los cuales Los diagramas pueden resultar fáciles de comprender. No se ha intentado ninguna clasificación científica de los colores.

A partir, pues, de estos dieciséis nombres de colores, tenemos un catálogo de los dieciséis teseractos, que forman un bloque de cuatro dimensiones análogo al bloque cúbico. Pero el cubo que podemos poner en el espacio y mirar no es uno de los teseractos constituyentes; es simplemente el comienzo, la cara sólida, el costado, el aspecto de un teseracto.

Ahora procederemos a derivar un nombre para cada región, punto, arista, cara plana, sólido y cara del teseracto.

El sistema quedará claro si miramos una representación en el plano de un teseracto con tres y uno con cuatro divisiones en su lado.

El teseracto formado por tres teseractos por sentido corresponde al cubo formado por tres cubos por sentido, y nos dará una nomenclatura completa.

En este diagrama, fig. 101 , 1 representa un cubo de 27 cubos, cada uno de los cuales es el comienzo de un teseracto. Estos cubos se representan simplemente por sus cuadrados más bajos, se debe entender el contenido sólido. 2 representa los 27 cubos que son el comienzo de los 27 teseractos una pulgada más adelante en la cuarta dimensión. Estos teseractos se representan como un bloque de cubos colocados uno al lado del otro el primer bloque, pero en sus posiciones adecuadas no pudieron estar en espacios con el primer set. 3 representa 27 cubos (formando un cubo más grande) que son los inicios de los teseractos, que comienzan dos pulgadas en la cuarta dirección de nuestro espacio y continúan otra pulgada. [Página 165]

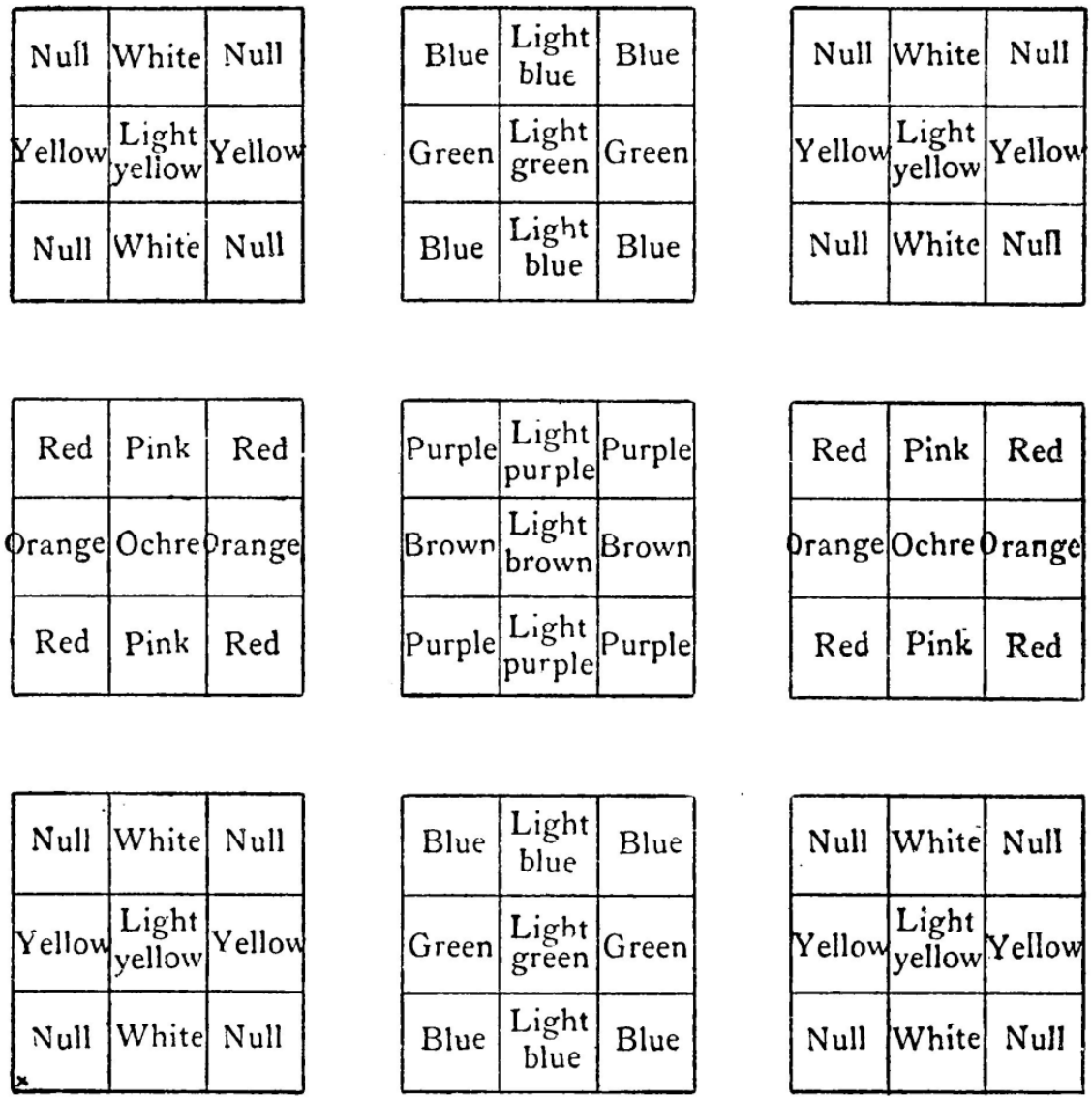


Figura 101.

1

Cada cubo es el comienzo del primer teseracto que va a la cuarta dimensión.

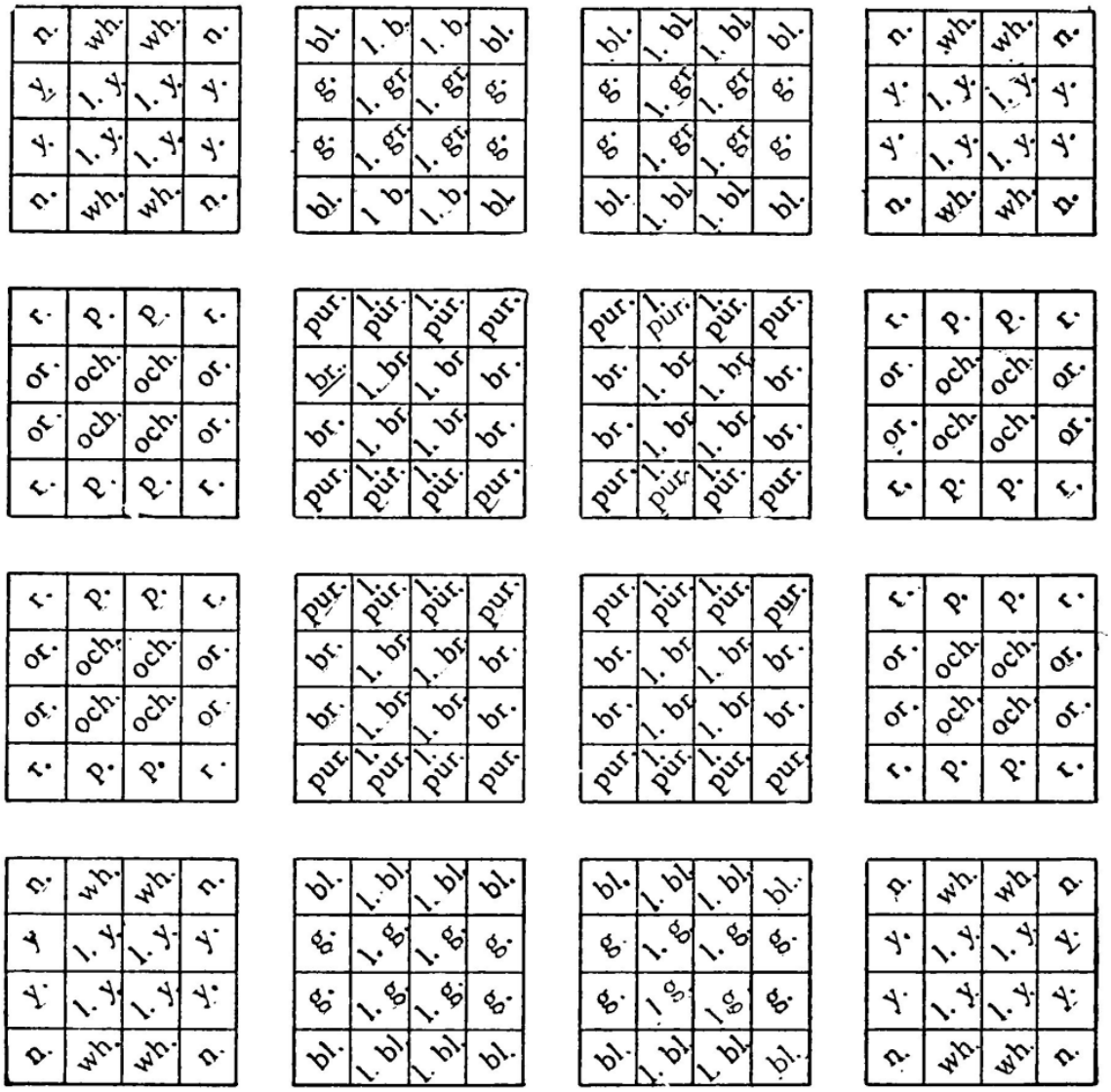
2

Cada cubo es el comienzo del segundo teseracto.

3

Cada cubo es el comienzo del tercer teseracto.

[Página 166]



[4]

Figura 102.

1	2	3	4
Un cubo de 64 cubos cada uno de 1 pulgada × 1 pulgada, el comienzo de un teseracto.	Un cubo de 64 cubos, cada uno de 1 pulgada × 1 pulgada × 1 pulgada, el comienzo de los teseractos a 1 pulgada de nuestro espacio en la cuarta dimensión.	Un cubo de 64 cubos, cada uno de 1 pulgada × 1 pulgada × 1 pulgada, el comienzo de los teseractos a 2 pulgadas de nuestro espacio en la cuarta dimensión.	Un cubo de 64 cubos, cada uno de 1 pulgada × 1 pulgada × 1 pulgada, el comienzo de los teseractos a 3 pulgadas de nuestro espacio en la cuarta dimensión.

[4] El plato coloreado, figs. 1, 2, 3, muestra estas relaciones de manera más notoria.

En la Fig. 102 , tenemos la representación de un bloque de 4 × 4 × 4 × 4 o 256 teseractos. Se dan en cuatro secciones consecutivas, cada una de las cuales se supone que está separada una pulgada en la cuarta dimensión, por lo que dan cuatro bloques de cubos, 64 en cada bloque. Aquí vemos, comparándolo con la cifra de 81 teseractos, que el número de las diferentes regiones muestra una diferente tendencia de aumento. Si se tomaran cinco bloques de cinco divisiones en cada sentido, esto quedaría aún más claro.

[Pág. 167]

Vemos, fig. 102 , que a partir del punto en cualquier esquina, las regiones de color blanco sólo se extienden en una línea. Lo mismo ocurre con el amarillo, el rojo y el azul. Respecto a esto último, cabe señalar que la línea azul no consiste en regiones unas junto a otras en el dibujo, sino en porciones que se presentan en cubos diferentes. Las partes que

se encuentran una al lado de otra en la cuarta dimensión siempre deben representarse así cuando se trata de una representación tridimensional. De nuevo, aquellas regiones como la rosa, siguen aumentando en dos dimensiones. Respecto a la región rosa esto se ve sin salir del propio cubo, las regiones rosadas aumentan en longitud y altura, pero en ninguna otra dimensión. Para examinar estas regiones basta con tomar una como muestra.

The purple increases in the same manner, for it comes in in a succession from below to above in block 2, and in a succession from block to block in 2 and 3. Now, a succession from below to above represents a continuous extension upwards, and a succession from block to block represents a continuous extension in the fourth dimension. Thus the purple regions increase in two dimensions, the upward and the fourth, so when we take a very great many divisions, and let each become very small, the purple region forms a two-dimensional extension.

In the same way, looking at the regions marked l. b. or light blue, which starts nearest a corner, we see that the tesseracts occupying it increase in length from left to right, forming a line, and that there are as many lines of light blue tesseracts as there are sections between the first and last section. Hence the light blue tesseracts increase in number in two ways—in the right and left, and in the fourth dimension. They ultimately form what we may call a plane surface. [Pg 168]

Now all those regions which contain a mixture of two simple colours, white, yellow, red, blue, increase in two ways. On the other hand, those which contain a mixture of three colours increase in three ways. Take, for instance, the ochre region; this has three colours, white, yellow, red; and in the cube itself it increases in three ways.

Now regard the orange region; if we add blue to this we get a brown. The region of the brown tesseracts extends in two ways on the left of the second block, No. 2 in the figure. It extends also from left to right in succession from one section to another, from section 2 to section 3 in our figure.

Hence the brown tesseracts increase in number in three dimensions upwards, to and fro, fourth dimension. Hence they form a cubic, a three-dimensional region; this region extends up and down, near and far, and in the fourth direction, but is thin in the direction from left to right. It is a cube which, when the complete tesseract is represented in our space, appears as a series of faces on the successive cubic sections of the tesseract. Compare fig. 103 in which the middle block, 2, stands as representing a great number of sections intermediate between 1 and 3.

In a similar way from the pink region by addition of blue we have the light purple region, which can be seen to increase in three ways as the number of divisions becomes greater. The three ways in which this region of tesseracts extends is up and down, right and left, fourth dimension. Finally, therefore, it forms a cubic mass of very small tesseracts, and when the tesseract is given in space sections it appears on the faces containing the upward and the right and left dimensions.

We get then altogether, as three-dimensional regions, ochre, brown, light purple, light green. [Pg 169]

Finally, there is the region which corresponds to a mixture of all the colours; there is only one region such as this. It is the one that springs from ochre by the addition of blue —this colour we call light brown.

Looking at the light brown region we see that it increases in four ways. Hence, the tesseracts of which it is composed increase in number in each of four dimensions, and the shape they form does not remain thin in any of the four dimensions. Consequently this region becomes the solid content of the block of tesseracts, itself; it is the real four-dimensional solid. All the other regions are then boundaries of this light brown region. If we suppose the process of increasing the number of tesseracts and diminishing their size carried on indefinitely, then the light brown coloured tesseracts become the whole interior mass, the three-coloured tesseracts become three-dimensional boundaries, thin in one

dimension, and form the ochre, the brown, the light purple, the light green. The two-coloured tesseracts become two-dimensional boundaries, thin in two dimensions, *e.g.*, the pink, the green, the purple, the orange, the light blue, the light yellow. The one-coloured tesseracts become bounding lines, thin in three dimensions, and the null points become bounding corners, thin in four dimensions. From these thin real boundaries we can pass in thought to the abstractions—points, lines, faces, solids—bounding the four-dimensional solid, which in this case is light brown coloured, and under this supposition the light brown coloured region is the only real one, is the only one which is not an abstraction.

It should be observed that, in taking a square as the representation of a cube on a plane, we only represent one face, or the section between two faces. The squares, as drawn by a plane being, are not the cubes themselves, but represent the faces or the sections of a cube. Thus in the plane being's diagram a cube of twenty-seven cubes "null" represents a cube, but is really, in the normal position, the orange square of a null cube, and may be called null, orange square. [Pg 170]

A plane being would save himself confusion if he named his representative squares, not by using the names of the cubes simply, but by adding to the names of the cubes a word to show what part of a cube his representative square was.

Thus a cube null standing against his plane touches it by null orange face, passing through his plane it has in the plane a square as trace, which is null white section, if we use the phrase white section to mean a section drawn perpendicular to the white line. In the same way the cubes which we take as representative of the tesseract are not the tesseract itself, but definite faces or sections of it. In the preceding figures we should say then, not null, but "null tesseract ochre cube," because the cube we actually have is the one determined by the three axes, white, red, yellow.

Hay otra forma en que podemos considerar la nomenclatura de colores de los límites de un teseracto.

Considere un punto nulo para moverlo trazando una línea blanca de una pulgada de largo y terminando en un punto nulo, ver fig. 103 o en la placa de color.

Consideremos entonces esta línea blanca con sus puntos terminales para moverse en una segunda dimensión, cada uno de los puntos traza una línea, la línea misma traza un área, y da dos líneas también, su posición inicial y su posición final.

Así, si llamamos "región" a cualquier elemento de la figura, como un punto, una línea, etc., cada "región" en movimiento traza un nuevo tipo de región, "una región superior", y da dos regiones de su propio tipo, una inicial y una final posición. La "región superior" significa una región con otra dimensión en ella. [Página 171]

Ahora el cuadrado puede moverse y generar un cubo. El cuadrado amarillo claro se mueve y traza la masa del cubo. Si dejamos que la adición de rojo denote la región formada por el movimiento hacia arriba, obtenemos un sólido ocre. La cara de color amarillo claro en sus posiciones inicial y terminal da los dos límites cuadrados del cubo arriba y abajo. Luego, cada una de las cuatro líneas del cuadrado amarillo claro (blanco, amarillo y el blanco, amarillo opuesto a ellas) traza un cuadrado delimitador. Por lo tanto, hay en total seis cuadrados delimitadores, cuatro de estos cuadrados se designan en color añadiendo rojo al color de las líneas generadoras. Finalmente, cada punto que se mueve hacia arriba da lugar a una línea de color nulo + rojo, o rojo, y luego están las posiciones inicial y terminal de los puntos, lo que da ocho puntos. El número de líneas es evidentemente doce, porque las cuatro líneas de este cuadrado amarillo claro dan cuatro líneas en su posición inicial, cuatro líneas en su posición final, mientras que los cuatro puntos trazan cuatro líneas, es decir, doce líneas en total.

Ahora bien, los cuadrados son cada uno de ellos límites separados del cubo, mientras que las líneas pertenecen, cada una de ellas, a dos cuadrados, así la línea roja es la que es común a los cuadrados naranja y rosa.

Supongamos ahora que hay una dirección, la cuarta dimensión, que es perpendicular a cada una de las dimensiones espaciales ya utilizadas: una dimensión perpendicular, por ejemplo, hacia arriba y hacia la derecha, de modo que el cuadrado rosa que se mueve en esta dirección traza sacar un cubo.

Una dimensión, además, perpendicular a las direcciones hacia arriba y hacia afuera, de modo que el cuadrado naranja que se mueve en esta dirección también traza un cubo, y el cuadrado amarillo claro, que también se mueve en esta dirección, traza un cubo. Bajo esta suposición, todo el cubo que se mueve en la dimensión desconocida traza algo nuevo: un nuevo tipo de volumen, un volumen superior. Este volumen superior es un volumen de cuatro dimensiones, y lo designamos en color añadiendo azul al color de aquello que al moverse lo genera. [Pág. 172]

Se genera por el movimiento del sólido ocre, por lo que es del color que llamamos marrón claro (blanco, amarillo, rojo, azul, mezclados entre sí). Está representado por una serie de secciones como 2 en la fig. 103 .

Ahora bien, este sólido superior de color marrón claro tiene como límites: primero, el cubo ocre en su posición inicial, segundo, el mismo cubo en su posición final, 1 y 3, fig. 103 . Cada uno de los cuadrados que delimitan el cubo, además, al moverse en esta nueva dirección, traza un cubo, por lo que tenemos desde el frente las caras rosadas del cubo, en tercer lugar, un cubo rosa, azul o violeta claro, que se muestra como una cara violeta claro. en el cubo 2 en la fig. 103 , representando este cubo cualquier número de secciones intermedias; cuarto, un cubo similar de la cara rosa opuesta; quinto, un cubo trazado por la cara naranja; este es de color marrón y está representado por la cara marrón del cubo de sección en la fig. 103 ; sexto, un cubo marrón correspondiente a la derecha; séptimo, un cubo que comienza en el cuadrado amarillo claro de abajo; la dimensión desconocida también está en ángulo recto con esta. Este cubo es de color amarillo claro y azul o verde claro; y, finalmente, octavo, un cubo correspondiente a la cara superior de color amarillo claro, que se muestra como el cuadrado verde claro en la parte superior de la sección del cubo.

El teseracto tiene, por tanto, ocho límites cúbicos. Estos lo encierran completamente, de modo que sería invisible para un ser de cuatro dimensiones. Ahora, en cuanto a los otros límites, así como el cubo tiene cuadrados, líneas y puntos como límites, el teseracto tiene cubos, cuadrados, líneas y puntos como límites.

El número de cuadrados se encuentra así: alrededor del cubo hay seis cuadrados, estos darán seis cuadrados en su posición inicial y seis en su posición final. Luego cada una de las doce líneas del cubo traza un cuadrado en el movimiento en la cuarta dimensión. Por tanto, habrá en total 12 + 12 = 24 cuadrados. [Pág. 173]

Si miramos cualquiera de estos cuadrados vemos que es la superficie de encuentro de dos de los lados cúbicos. Así, la línea roja, con su movimiento en la cuarta dimensión, traza un cuadrado violeta; esto es común a dos cubos, uno de los cuales está trazado por el cuadrado rosa que se mueve en la cuarta dimensión, y el otro está trazado por el cuadrado rosa que se mueve en la cuarta dimensión. cuadrado naranja moviéndose de la misma manera. Tomemos otro cuadrado, el amarillo claro, que es común al cubo ocre y al cubo verde claro. El cubo ocre proviene del cuadrado amarillo claro moviéndolo hacia arriba, el cubo verde claro se obtiene del cuadrado amarillo claro moviéndolo en la cuarta dimensión. El número de líneas es treinta y dos, pues las doce líneas del cubo dan doce líneas del teseracto en su posición inicial, y doce en su posición final, lo que da veinticuatro, mientras que cada uno de los ocho puntos traza una línea, formando así treinta y dos líneas en total.

Cada una de las líneas es común a tres cubos o a tres caras cuadradas; Tomemos, por ejemplo, la línea roja. Esto es común a la cara naranja, la cara rosa y la cara que se forma al mover la línea roja en la sexta dimensión, es decir, la cara violeta. También es común al cubo ocre, al cubo violeta pálido y al cubo marrón.

Los puntos son comunes a seis caras cuadradas y a cuatro cubos; por tanto, el punto nulo desde el que partimos es común a las tres caras cuadradas: rosa, amarillo claro, naranja y a las tres caras cuadradas formadas moviendo las tres líneas. blanco, amarillo, rojo, en la cuarta dimensión, es decir, las caras azul claro, verde claro, violeta, es decir, hasta seis caras en total. Los cuatro cubos que se encuentran en él son el cubo ocre, el cubo violeta claro, el cubo marrón y el cubo verde claro. [Página 174]

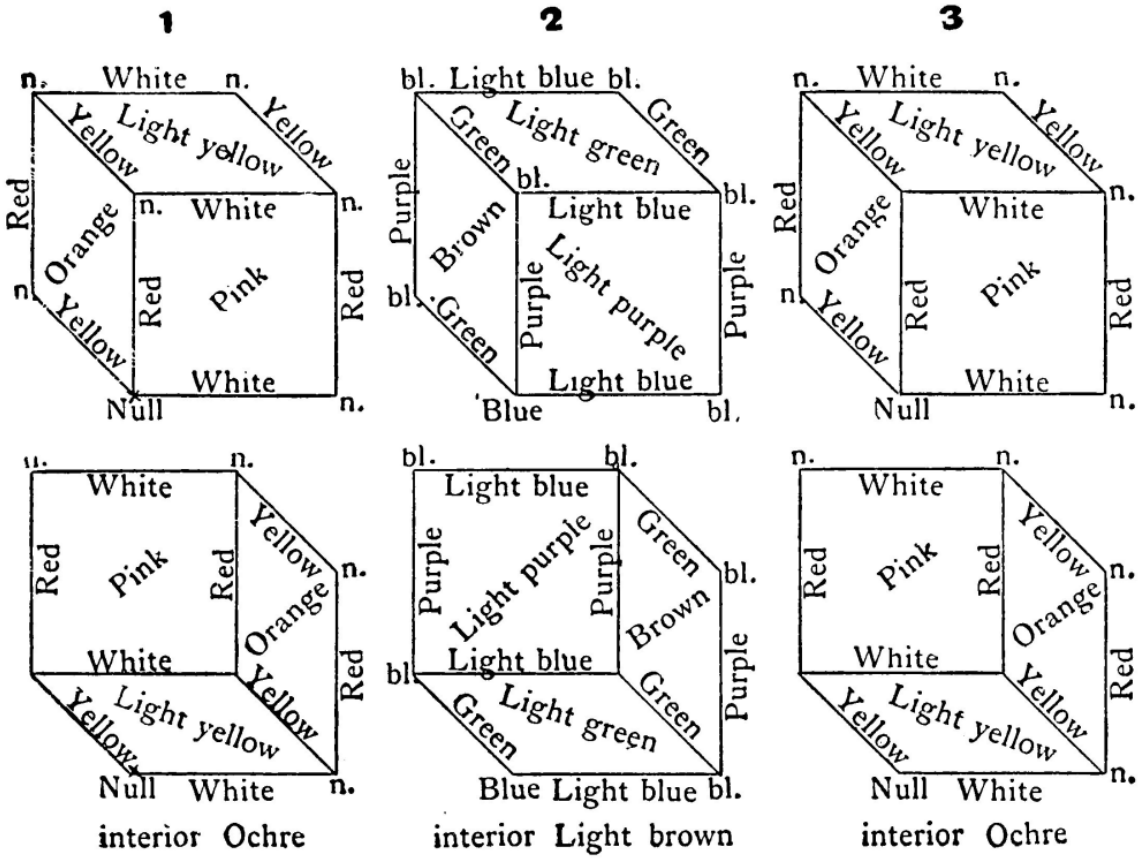


Figura 103.

El teseracto, ejes rojos, blancos y amarillos en el espacio. En la línea inferior se muestran las tres caras traseras, desmontándose el interior.]

[Página 175]

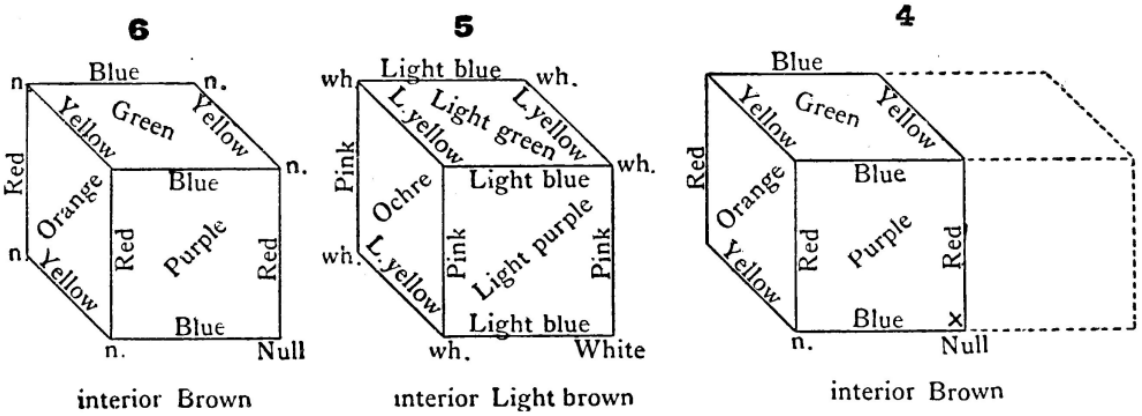


Fig. 104.

El teseracto, los ejes rojo, amarillo y azul en el espacio, el eje azul va hacia la izquierda, las caras opuestas tienen el mismo color.

Una vista completa del teseracto en sus diversas presentaciones espaciales se ofrece en las siguientes figuras o cubos de catálogo, figs. 103-106. El primer cubo de cada figura. Representa la vista de un teseracto coloreado como se describe cuando comienza a pasar transversalmente a nuestro espacio. La figura intermedia representa una vista en sección cuando está parcialmente atravesada, y la figura final representa el otro extremo cuando apenas se está desmayando. Estas cifras se explicarán en detalle en el próximo capítulo. [Pág. 176]

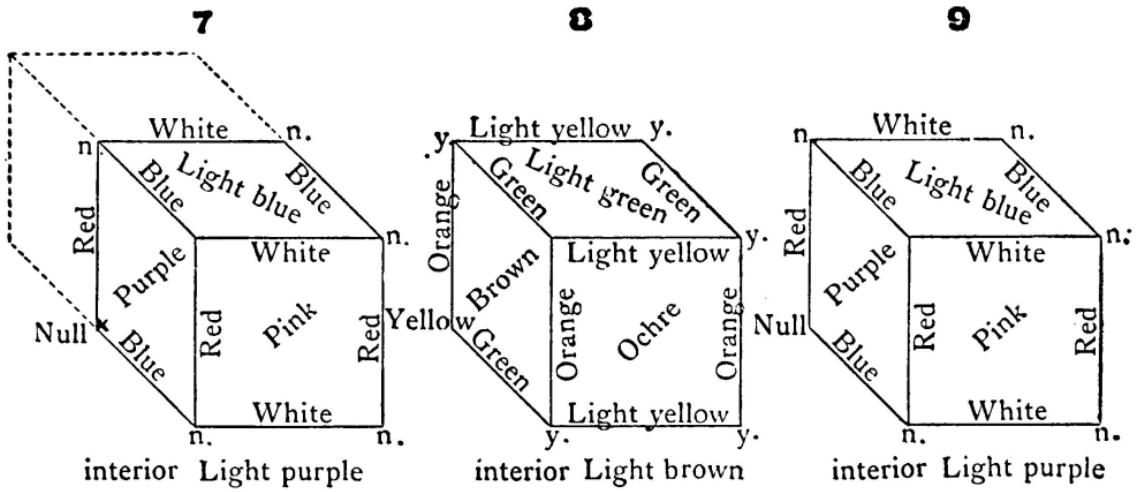


Fig. 105.

El teseracto, con ejes rojos, blancos y azules en el espacio. Las caras opuestas tienen colores idénticos.

[Pág. 177]

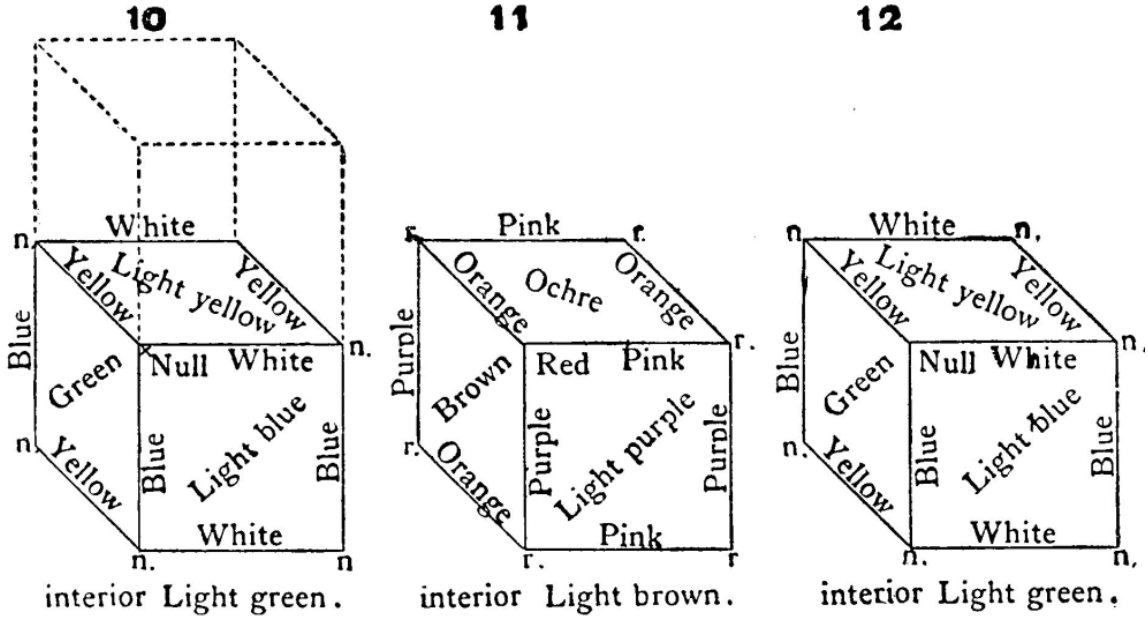


Fig. 106.

El teseracto, con ejes azules, blancos y amarillos en el espacio. El eje azul corre hacia abajo desde la base del cubo ocre tal como estaba originalmente. Las caras opuestas tienen colores idénticos.

Hemos obtenido así una nomenclatura para cada una de las regiones de un teseracto; podemos hablar de cualquiera de los ocho cubos delimitadores, las veinte caras cuadradas, las treinta y dos líneas, los dieciséis puntos.

CAPÍTULO XIII

COMENTARIOS SOBRE LAS CIFRAS

[Pág. 178]

Una inspección de las cifras anteriores dará respuesta a muchas preguntas sobre el teseracto. Si tenemos un teseracto de una pulgada en cada sentido, entonces se puede representar como un cubo: un cubo que tiene ejes blanco, amarillo y rojo, y desde este cubo, como comienzo, un volumen que se extiende hasta la cuarta dimensión. Supongamos ahora que el teseracto pasa transversalmente a nuestro espacio, el cubo de los ejes rojo, amarillo y blanco desaparece de inmediato, es infinitamente delgado en la cuarta dimensión. Su lugar lo ocupan aquellas partes del teseracto que se encuentran más alejadas de nuestro espacio en la cuarta dimensión. Cada una de estas secciones durará sólo un momento, pero el conjunto de ellas ocupará un tiempo apreciable en su transcurso. Si tomamos el ritmo de una pulgada por minuto las secciones tomarán todo el minuto en su paso por nuestro espacio, tomarán todo el minuto excepto el momento que ocupan el cubo inicial y el cubo final en su cruce por nuestro espacio. espacio. En cada uno de los cubos, los cubos de sección, podemos dibujar líneas en todas direcciones excepto en la dirección que ocupa la línea azul, la cuarta dimensión; Las líneas en esa dirección están representadas por la transición de una sección del cubo a otra. Así, para darnos una representación adecuada del teseracto, deberíamos tener un número ilimitado de cubos de sección intermedia entre el primer cubo delimitador, el cubo ocre, y el último cubo delimitador, el otro cubo ocre. Prácticamente tres cubos de sección intermedia son suficientes para la mayoría de los propósitos. Tomaremos entonces una serie de cinco figuras (dos cubos terminales y tres secciones intermedias) y mostraremos cómo aparecen las diferentes regiones en nuestro espacio cuando tomamos cada conjunto de tres de los cuatro ejes del teseracto como si estuvieran en nuestro espacio.

[Pág. 179]

En la Fig. Para los colores se utilizan 107 letras iniciales. Una referencia a la fig. 103 mostrará la nomenclatura completa, que aquí simplemente se indica.

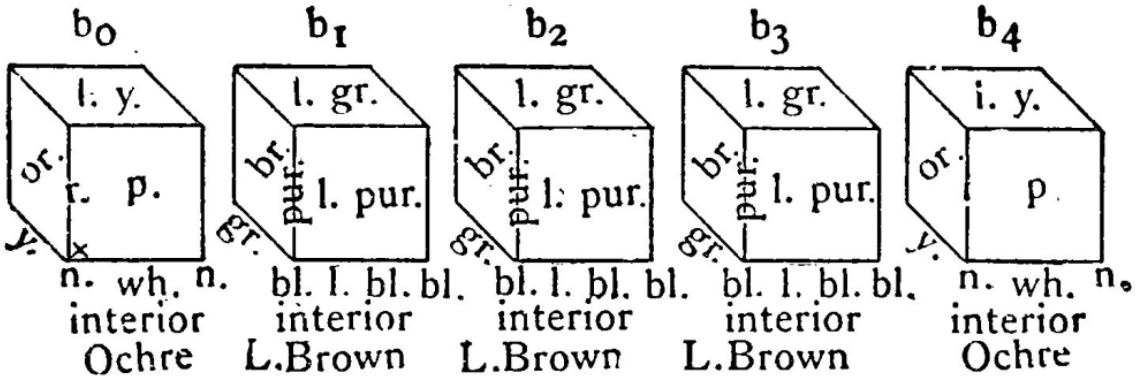


Figura 107.

In this figure the tesseract is shown in five stages distant from our space: first, zero; second, 1/4 in.; third, 2/4 in.; fourth, 3/4 in.; fifth, 1 in.; which are called *b*0, *b*1, *b*2, *b*3, *b*4, because they are sections taken at distances 0, 1, 2, 3, 4 quarter inches along the blue line. All the regions can be named from the first cube, the *b*0 cube, as before, simply by remembering that transference along the b axis gives the addition of blue to the colour of the region in the ochre, the *b*0 cube. In the final cube *b*4, the colouring of the original *b*0 cube is repeated. Thus the red line moved along the blue axis gives a red and blue or purple square. This purple square appears as the three purple lines in the sections *b*1, *b*2, *b*3, taken at 1/4, 2/4, 3/4 of an inch in the fourth dimension. If the tesseract moves transverse to our space we have then in this particular region, first of all a red line which lasts for a moment, secondly a purple line which takes its place. This purple line lasts for a minute—that is, all of a minute, except the moment taken by the crossing our space of the initial and final red line. The purple line having lasted for this period is succeeded by a red line, which lasts for a moment; then this goes and the tesseract has passed across our space. The final red line we call red bl., because it is separated from the initial red

[Pg 180]

line by a distance along the axis for which we use the colour blue. Thus a line that lasts represents an area duration; is in this mode of presentation equivalent to a dimension of space. In the same way the white line, during the crossing our space by the tesseract, is succeeded by a light blue line which lasts for the inside of a minute, and as the tesseract leaves our space, having crossed it, the white bl. line appears as the final termination.

Take now the pink face. Moved in the blue direction it traces out a light purple cube. This light purple cube is shown in sections in b_1, b_2, b_3, and the farther face of this cube in the blue direction is shown in b_4—a pink face, called pink *b* because it is distant from the pink face we began with in the blue direction. Thus the cube which we colour light purple appears as a lasting square. The square face itself, the pink face, vanishes instantly the tesseract begins to move, but the light purple cube appears as a lasting square. Here also duration is the equivalent of a dimension of space—a lasting square is a cube. It is useful to connect these diagrams with the views given in the coloured plate.

Take again the orange face, that determined by the red and yellow axes; from it goes a brown cube in the blue direction, for red and yellow and blue are supposed to make brown. This brown cube is shown in three sections in the faces b_1, b_2, b_3. In b_4 is the opposite orange face of the brown cube, the face called orange *b*, for it is distant in the blue direction from the orange face. As the tesseract passes transverse to our space, we have then in this region an instantly vanishing orange square, followed by a lasting brown square, and finally an orange face which vanishes instantly. [Pg 181]

Now, as any three axes will be in our space, let us send the white axis out into the unknown, the fourth dimension, and take the blue axis into our known space dimension. Since the white and blue axes are perpendicular to each other, if the white axis goes out into the fourth dimension in the positive sense, the blue axis will come into the direction the white axis occupied, in the negative sense.

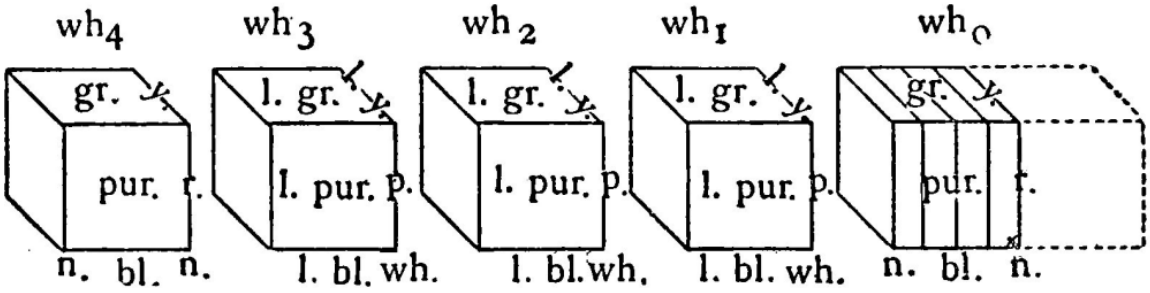


Fig. 108.

Hence, not to complicate matters by having to think of two senses in the unknown direction, let us send the white line into the positive sense of the fourth dimension, and take the blue one as running in the negative sense of that direction which the white line has left; let the blue line, that is, run to the left. We have now the row of figures in fig. 108. The dotted cube shows where we had a cube when the white line ran in our space—now it has turned out of our space, and another solid boundary, another cubic face of the tesseract comes into our space. This cube has red and yellow axes as before; but now, instead of a white axis running to the right, there is a blue axis running to the left. Here we can distinguish the regions by colours in a perfectly systematic way. The red line traces out a purple square in the transference along the blue axis by which this cube is generated from the orange face. This purple square made by the motion of the red line is the same purple face that we saw before as a series of lines in the sections b_1, b_2, b_3. Here, since both red and blue axes are in our space, we have no need of duration to represent the area they determine. In the motion of the tesseract across space this purple face would instantly disappear. [Pg 182]

From the orange face, which is common to the initial cubes in fig. 107 and fig. 108, there goes in the blue direction a cube coloured brown. This brown cube is now all in our space, because each of its three axes run in space directions, up, away, to the left. It is the

same brown cube which appeared as the successive faces on the sections b_1, b_2, b_3. Having all its three axes in our space, it is given in extension; no part of it needs to be represented as a succession. The tesseract is now in a new position with regard to our space, and when it moves across our space the brown cube instantly disappears.

In order to exhibit the other regions of the tesseract we must remember that now the white line runs in the unknown dimension. Where shall we put the sections at distances along the line? Any arbitrary position in our space will do: there is no way by which we can represent their real position.

However, as the brown cube comes off from the orange face to the left, let us put these successive sections to the left. We can call them wh_0, wh_1, wh_2, wh_3, wh_4, because they are sections along the white axis, which now runs in the unknown dimension.

Running from the purple square in the white direction we find the light purple cube. This is represented in the sections wh_1, wh_2, wh_3, wh_4, fig. 108. It is the same cube that is represented in the sections b_1, b_2, b_3: in fig. 107 the red and white axes are in our space, the blue out of it; in the other case, the red and blue are in our space, the white out of it. It is evident that the face pink *y*, opposite the pink face in fig. 107, makes a cube shown in squares in b_1, b_2, b_3, b_4, on the opposite side to the *l* purple squares. Also the light yellow face at the base of the cube b_0, makes a light green cube, shown as a series of base squares. [Pg 183]

El mismo cubo verde claro se puede encontrar en la fig. 107 . El cuadrado base en wh_0 es un cuadrado verde, ya que está rodeado por ejes azules y amarillos. De él sale un cubo en la dirección blanca, este es entonces un cubo verde claro y el mismo que acabamos de mencionar que existe en las secciones b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.

Sin embargo, el caso es un poco diferente con el cubo marrón. Este cubo lo tenemos completamente en el espacio en la sección wh_0, fig. 108 , mientras que existe como una serie de cuadrados, los de la izquierda, en los tramos b_0, b_1, b_2, b_3, b_4. El cubo marrón existe como un sólido en nuestro espacio, como se muestra en la fig. 108 . En el modo de representación del teseracto exhibido en la fig. 107 , el mismo cubo marrón aparece como una sucesión de cuadrados. Es decir, a medida que el teseracto se mueve a través del espacio, el cubo marrón sería en realidad para nosotros un cuadrado: sería simplemente el límite duradero de otro sólido. No tendría espesor alguno, sólo extensión en dos dimensiones, y su duración mostraría su solidez en tres dimensiones.

Es obvio que, si hay un espacio de cuatro dimensiones, la materia en tres dimensiones sólo es una mera abstracción; todos los objetos materiales deben tener entonces un ligero espesor tetradimensional. En este caso la declaración anterior sufrirá modificación. El cubo material que se utiliza como modelo del límite de un teseracto tendrá un ligero espesor en la cuarta dimensión, y cuando el cubo sea presentado en otro aspecto, no sería una mera superficie. Pero lo más conveniente es considerar que los cubos que utilizamos no tienen extensión alguna en la cuarta dimensión. Esta consideración sirve para resaltar un punto al que aludimos antes: que, si hay una cuarta dimensión, nuestra concepción de un sólido es la concepción de una mera abstracción, y nuestro hablar de objetos tridimensionales reales le parecería a un cuatridimensional. sería tan incorrecto como nos parecería que un ser bidimensional hablara de cuadrados reales, triángulos reales, etc. [Página 184]

La consideración de las dos vistas del cubo marrón muestra que cualquier sección de un cubo puede verse mediante la presentación del cubo en una posición diferente en el espacio de cuatro dimensiones. Las caras marrones en b_1, b_2, b_3, son las mismas secciones marrones que se obtendrían cortando el cubo marrón, wh_0, a las distancias correctas a lo largo de la línea azul, como se muestra en la fig. 108 . Pero a medida que

estas secciones se colocan en el cubo marrón, wh_0, van una detrás de la otra en la dirección azul. Ahora, en las secciones wh_1, wh_2, wh_3, estamos mirando estas secciones desde la dirección blanca; la dirección azul no existe en estas figuras. Entonces los vemos en una dirección perpendicular a aquella en la que aparecen uno detrás del otro en wh_0. Hay vistas intermedias, que vendrían en la rotación de un teseracto. Estos cuadrados marrones se pueden observar desde direcciones intermedias entre los ejes blanco y azul. Hay que recordar que la cuarta dimensión es perpendicular por igual a los tres ejes espaciales. De ahí que debemos tomar las combinaciones del eje azul, con cada dos de nuestros tres ejes, blanco, rojo, amarillo, por turno.

En la Fig. 109 tomamos los ejes rojo, blanco y azul en el espacio, enviando el amarillo a la cuarta dimensión. Si entra en el sentido positivo de la cuarta dimensión, la línea azul vendrá en la dirección opuesta a aquella en la que La línea amarilla pasaba antes. Por lo tanto, el cubo determinado por los ejes blanco, rojo y azul partirá del plano rosa y correrá hacia nosotros. El cubo punteado muestra dónde estaba el cubo ocre. Cuando se gira fuera del espacio, el cubo que viene desde su cara frontal es el que entra en nuestro espacio en este giro. Dado que la línea amarilla ahora corre en la dimensión desconocida, llamamos a las secciones y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, ya que están hechas a distancias 0, 1, 2, 3, 4, cuartos de pulgada a lo largo de la línea amarilla. línea. Suponemos que estos cubos dispuestos en línea vienen hacia nosotros; no es que esto sea más natural que cualquier otra serie arbitraria de posiciones, pero concuerda con el plan adoptado previamente.

[Página 185]

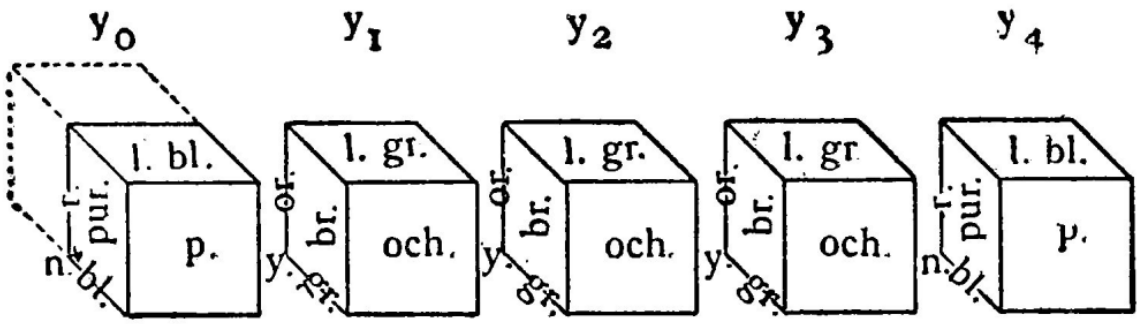


Figura 109.

El interior del primer cubo, y_0, es el que se obtiene del rosa añadiendo azul o, como lo llamamos, violeta claro. Las caras del cubo son de color azul claro, violeta y rosa. Tal como está dibujado, solo podemos ver la cara más cercana a nosotros, que no es aquella en la que comienza el cubo, pero la cara del lado opuesto tiene el mismo nombre de color que la cara que está hacia nosotros.

Las secciones sucesivas de la serie, y_0, y_1, y_2, etc., pueden considerarse derivadas de secciones del cubo b_0 hechas a distancias a lo largo del eje amarillo. ¿Qué distancia hay a un cuarto de pulgada de la cara rosada en dirección amarilla? Esta pregunta se responde tomando una sección desde un punto a un cuarto de pulgada a lo largo del eje amarillo en el cubo b_0, fig. 107. Es una sección ocre con líneas anaranjadas y amarillas claras. Por tanto, esta sección sustituirá a la cara rosa. en y_1 cuando seguimos en dirección amarilla. Así, el primer tramo, y_1, partirá de una cara ocre con líneas de color amarillo claro y naranja. El color del eje que se encuentra en el espacio hacia nosotros es azul, por lo que las regiones de esta sección del cubo están determinadas en nomenclatura, se encontrarán completas en la fig. 105.

[Página 186]

Sólo queda una figura por dibujar, y es aquella en la que el eje rojo es sustituido por el azul. Aquí, como antes, si el eje rojo sale en el sentido positivo de la cuarta dimensión, la

línea azul debe entrar en nuestro espacio en el sentido negativo de la dirección que dejó la línea roja. En consecuencia, el primer cubo quedará debajo de la posición de nuestro cubo ocre, con el que teníamos costumbre de empezar.

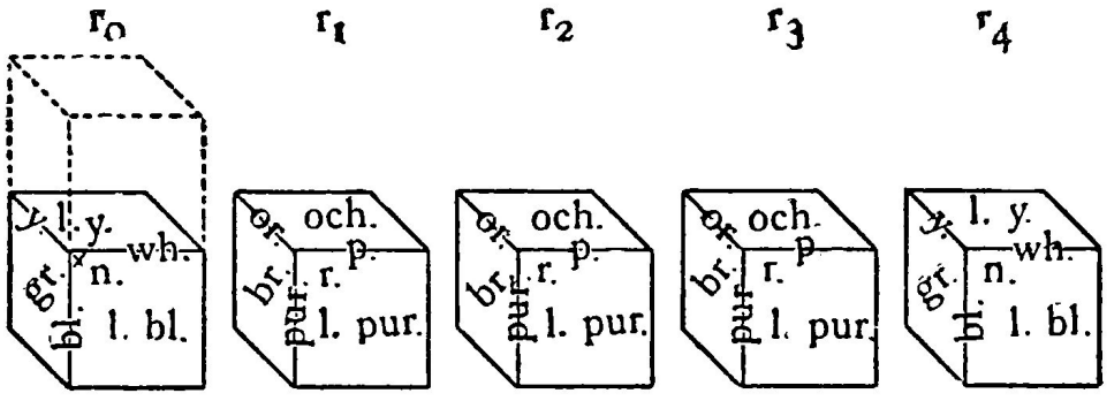


Figura 110.

Para mostrar estas figuras debemos suponer que el cubo ocre está sobre un soporte móvil. Cuando la línea roja oscila hacia la dimensión desconocida y la línea azul desciende, aparece un cubo debajo del lugar ocupado por el cubo ocre. El cubo punteado muestra dónde estaba el cubo ocre. Ese cubo ha desaparecido y un cubo diferente corre hacia abajo desde su base. Este cubo tiene ejes blancos, amarillos y azules. Su parte superior es un cuadrado de color amarillo claro y, por tanto, su interior es de color amarillo claro + azul o verde claro. Su cara frontal está formada por la línea blanca que se mueve a lo largo del eje azul, y por tanto es de color azul claro, la parte izquierda está formada por la línea amarilla que se mueve a lo largo del eje azul, y por tanto de color verde.

Como la línea roja ahora corre en la cuarta dimensión, las secciones sucesivas pueden llamarse r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, indicando estas letras que a distancias 0, 1/4, 2/4, 3/ 4, 1 pulgada a lo largo del eje rojo tomamos todos los teseractos que se pueden encontrar en un espacio tridimensional, este espacio tridimensional no se extiende en absoluto en la cuarta dimensión, sino arriba y abajo, derecha e izquierda, lejos y cerca. [Pág. 187]

We can see what should replace the light yellow face of r_0, when the section r_1 comes in, by looking at the cube b_0, fig. 107. What is distant in it one-quarter of an inch from the light yellow face in the red direction? It is an ochre section with orange and pink lines and red points; see also fig. 103.

This square then forms the top square of r_1. Now we can determine the nomenclature of all the regions of r_1 by considering what would be formed by the motion of this square along a blue axis.

But we can adopt another plan. Let us take a horizontal section of r_0, and finding that section in the figures, of fig. 107 or fig. 103, from them determine what will replace it, going on in the red direction.

A section of the r_0 cube has green, light blue, green, light blue sides and blue points.

Now this square occurs on the base of each of the section figures, b_1, b_2, etc. In them we see that 1/4 inch in the red direction from it lies a section with brown and light purple lines and purple corners, the interior being of light brown. Hence this is the nomenclature of the section which in r_1 replaces the section of r_0 made from a point along the blue axis.

Hence the colouring as given can be derived.

We have thus obtained a perfectly named group of tesseracts. We can take a group of eighty-one of them 3 × 3 × 3 × 3, in four dimensions, and each tesseract will have its name null, red, white, yellow, blue, etc., and whatever cubic view we take of them we can say exactly what sides of the tesseracts we are handling, and how they touch each other. [5] [Pg 188]

[5] At this point the reader will find it advantageous, if he has the models, to go through the manipulations described in the appendix.

Thus, for instance, if we have the sixteen tesseracts shown below, we can ask how does null touch blue.

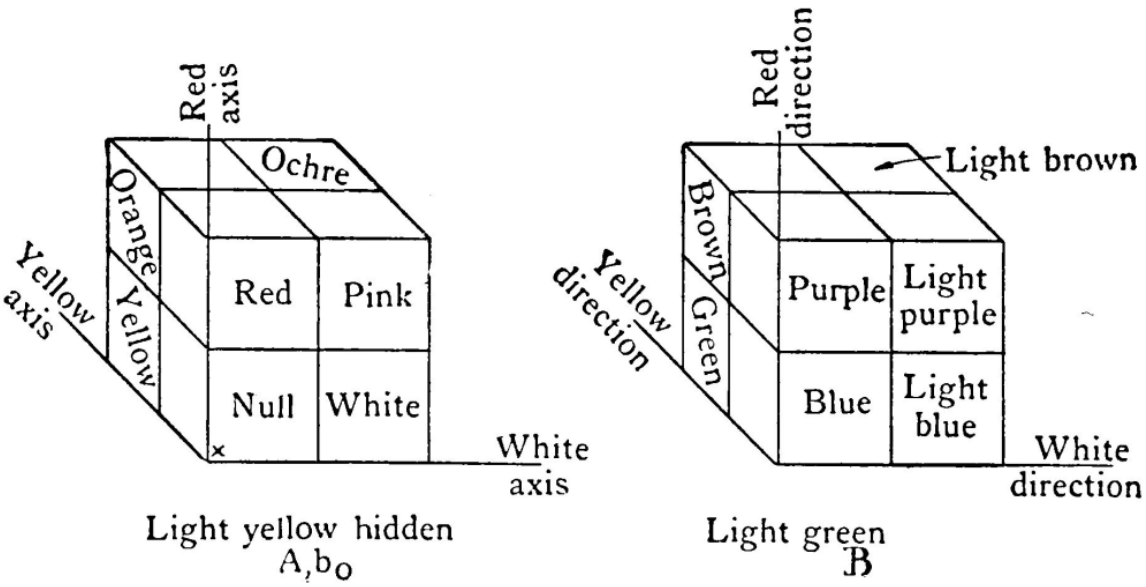


Fig. 111.

In the arrangement given in fig. 111 we have the axes white, red, yellow, in space, blue running in the fourth dimension. Hence we have the ochre cubes as bases. Imagine now the tesseractic group to pass transverse to our space—we have first of all null ochre cube, white ochre cube, etc.; these instantly vanish, and we get the section shown in the middle cube in fig. 103, and finally, just when the tesseract block has moved one inch transverse to our space, we have null ochre cube, and then immediately afterwards the ochre cube of blue comes in. Hence the tesseract null touches the tesseract blue by its ochre cube, which is in contact, each and every point of it, with the ochre cube of blue.

How does null touch white, we may ask? Looking at the beginning A, fig. 111, where we have the ochre cubes, we see that null ochre touches white ochre by an orange face. Now let us generate the null and white tesseracts by a motion in the blue direction of each of these cubes. Each of them generates the corresponding tesseract, and the plane of contact of the cubes generates the cube by which the tesseracts are in contact. Now an orange plane carried along a blue axis generates a brown cube. Hence null touches white by a brown cube. [Pg 189]

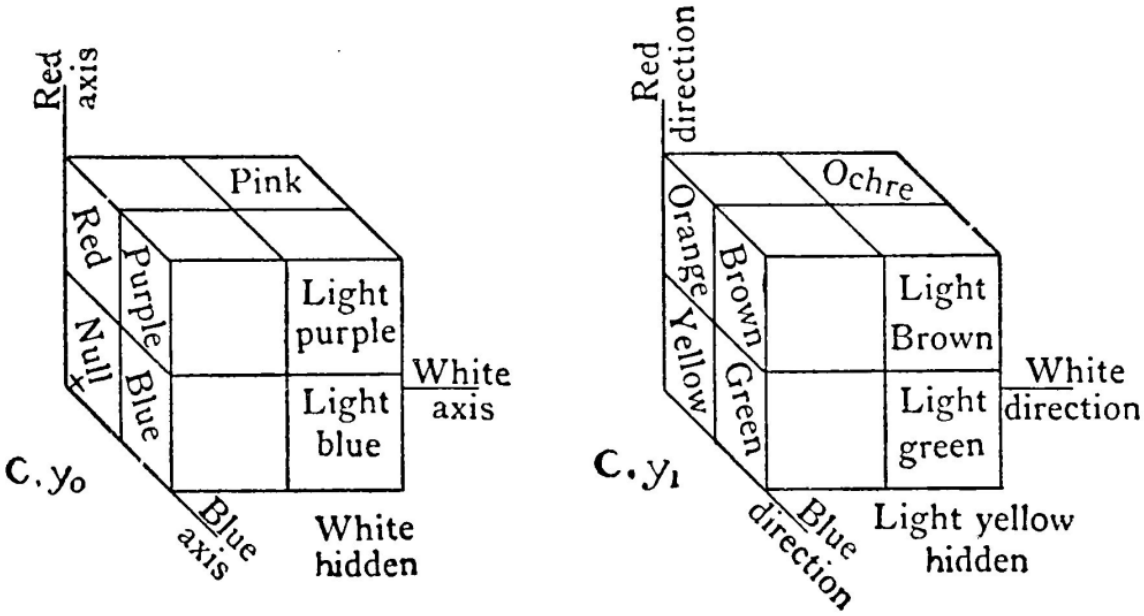


Fig. 112.

If we ask again how red touches light blue tesseract, let us rearrange our group, fig. 112, or rather turn it about so that we have a different space view of it; let the red axis and the white axis run up and right, and let the blue axis come in space towards us, then the yellow axis runs in the fourth dimension. We have then two blocks in which the bounding cubes of the tesseracts are given, differently arranged with regard to us—the arrangement is really the same, but it appears different to us. Starting from the plane of the red and white axes we have the four squares of the null, white, red, pink tesseracts as shown in A, on the red, white plane, unaltered, only from them now comes out towards us the blue axis. Hence we have null, white, red, pink tesseracts in contact with our space by their cubes which have the red, white, blue axis in them, that is by the light purple cubes. Following on these four tesseracts we have that which comes next to them in the blue direction, that is the four blue, light blue, purple, light purple. These are likewise in contact with our space by their light purple cubes, so we see a block as named in the figure, of which each cube is the one determined by the red, white, blue, axes. [Pg 190]

The yellow line now runs out of space; accordingly one inch on in the fourth dimension we come to the tesseracts which follow on the eight named in C, fig. 112, in the yellow direction.

These are shown in $C.y_1$, fig. 112. Between figure C and $C.y_1$ is that four-dimensional mass which is formed by moving each of the cubes in C one inch in the fourth dimension —that is, along a yellow axis; for the yellow axis now runs in the fourth dimension.

In the block C we observe that red (light purple cube) touches light blue (light purple cube) by a point. Now these two cubes moving together remain in contact during the period in which they trace out the tesseracts red and light blue. This motion is along the yellow axis, consequently red and light blue touch by a yellow line.

We have seen that the pink face moved in a yellow direction traces out a cube; moved in the blue direction it also traces out a cube. Let us ask what the pink face will trace out if it is moved in a direction within the tesseract lying equally between the yellow and blue directions. What section of the tesseract will it make?

We will first consider the red line alone. Let us take a cube with the red line in it and the yellow and blue axes.

The cube with the yellow, red, blue axes is shown in fig. 113. If the red line is moved equally in the yellow and in the blue direction by four equal motions of ¼ inch each, it takes the positions 11, 22, 33, and ends as a red line. [Pg 191]

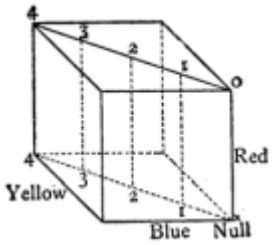


Fig. 113.

Now, the whole of this red, yellow, blue, or brown cube appears as a series of faces on the successive sections of the tesseract starting from the ochre cube and letting the blue axis run in the fourth dimension. Hence the plane traced out by the red line appears as a series of lines in the successive sections, in our ordinary way of representing the tesseract; these lines are in different places in each successive section.

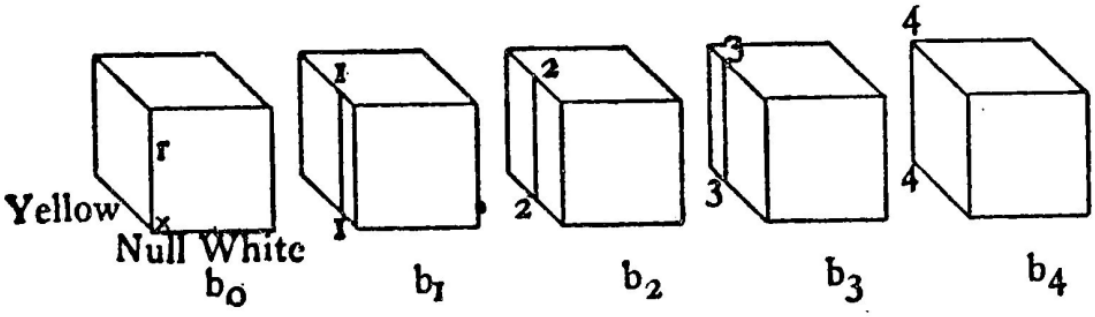


Fig. 114.

Thus drawing our initial cube and the successive sections, calling them b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, fig. 115, we have the red line subject to this movement appearing in the positions indicated.

We will now investigate what positions in the tesseract another line in the pink face assumes when it is moved in a similar manner.

Take a section of the original cube containing a vertical line, 4, in the pink plane, fig. 115. We have, in the section, the yellow direction, but not the blue.

From this section a cube goes off in the fourth dimension, which is formed by moving each point of the section in the blue direction. [Pg 192]

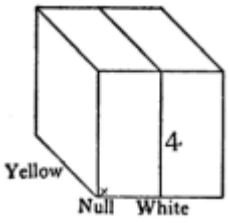


Fig. 115.

Drawing this cube we have fig. 116.

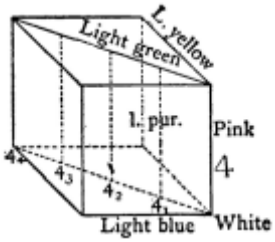


Fig. 116.

Now this cube occurs as a series of sections in our original representation of the tesseract. Taking four steps as before this cube appears as the sections drawn in b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, fig. 117, and if the line 4 is subjected to a movement equal in the blue and yellow directions, it will occupy the positions designated by 4, 4_1, 4_2, 4_3, 4_4.

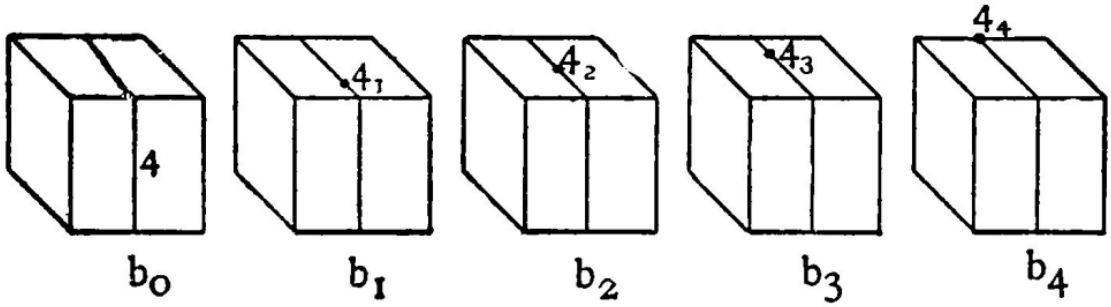


Fig. 117.

Hence, reasoning in a similar manner about every line, it is evident that, moved equally in the blue and yellow directions, the pink plane will trace out a space which is shown by the series of section planes represented in the diagram.

Thus the space traced out by the pink face, if it is moved equally in the yellow and blue directions, is represented by the set of planes delineated in Fig. 118, pink face or 0, then 1, 2, 3, and finally pink face or 4. This solid is a diagonal solid of the tesseract, running from a pink face to a pink face. Its length is the length of the diagonal of a square, its side is a square. [Pg 193]

Let us now consider the unlimited space which springs from the pink face extended.

This space, if it goes off in the yellow direction, gives us in it the ochre cube of the tesseract. Thus, if we have the pink face given and a point in the ochre cube, we have determined this particular space.

Similarly going off from the pink face in the blue direction is another space, which gives us the light purple cube of the tesseract in it. And any point being taken in the light purple cube, this space going off from the pink face is fixed.

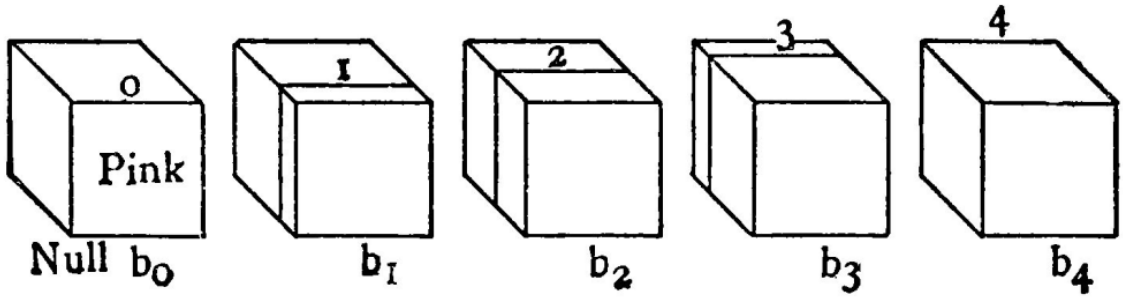


Fig. 118.

The space we are speaking of can be conceived as swinging round the pink face, and in each of its positions it cuts out a solid figure from the tesseract, one of which we have seen represented in fig. 118.

Each of these solid figures is given by one position of the swinging space, and by one only. Hence in each of them, if one point is taken, the particular one of the slanting spaces is fixed. Thus we see that given a plane and a point out of it a space is determined.

Now, two points determine a line.

Again, think of a line and a point outside it. Imagine a plane rotating round the line. At some time in its rotation it passes through the point. Thus a line and a point, or three points, determine a plane. And finally four points determine a space. We have seen that a plane and a point determine a space, and that three points determine a plane; so four points will determine a space. [Pg 194]

These four points may be any points, and we can take, for instance, the four points at the extremities of the red, white, yellow, blue axes, in the tesseract. These will determine a space slanting with regard to the section spaces we have been previously considering. This space will cut the tesseract in a certain figure.

One of the simplest sections of a cube by a plane is that in which the plane passes through the extremities of the three edges which meet in a point. We see at once that this plane would cut the cube in a triangle, but we will go through the process by which a plane being would most conveniently treat the problem of the determination of this shape, in order that we may apply the method to the determination of the figure in which a space cuts a tesseract when it passes through the 4 points at unit distance from a corner.

We know that two points determine a line, three points determine a plane, and given any two points in a plane the line between them lies wholly in the plane.

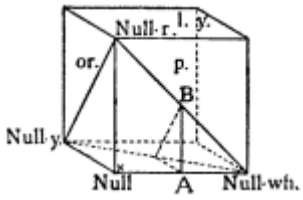


Fig. 119.

Let now the plane being study the section made by a plane passing through the null *r*, null *wh*, and null *y* points, fig. 119. Looking at the orange square, which, as usual, we suppose to be initially in his plane, he sees that the line from null *r* to null *y*, which is a line in the section plane, the plane, namely, through the three extremities of the edges meeting in null, cuts the orange face in an orange line with null points. This then is one of the boundaries of the section figure. [Pg 195]

Let now the cube be so turned that the pink face comes in his plane. The points null *r* and null *wh* are now visible. The line between them is pink with null points, and since this line is common to the surface of the cube and the cutting plane, it is a boundary of the figure in which the plane cuts the cube.

Again, suppose the cube turned so that the light yellow face is in contact with the plane being's plane. He sees two points, the null *wh* and the null *y*. The line between these lies in the cutting plane. Hence, since the three cutting lines meet and enclose a portion of the cube between them, he has determined the figure he sought. It is a triangle with orange, pink, and light yellow sides, all equal, and enclosing an ochre area.

Let us now determine in what figure the space, determined by the four points, null *r*, null *y*, null *wh*, null *b*, cuts the tesseract. We can see three of these points in the primary position of the tesseract resting against our solid sheet by the ochre cube. These three points determine a plane which lies in the space we are considering, and this plane cuts the ochre cube in a triangle, the interior of which is ochre (fig. 119 will serve for this view), with pink, light yellow and orange sides, and null points. Going in the fourth direction, in one sense, from this plane we pass into the tesseract, in the other sense we pass away from it. The whole area inside the triangle is common to the cutting plane we see, and a boundary of the tesseract. Hence we conclude that the triangle drawn is common to the tesseract and the cutting space.

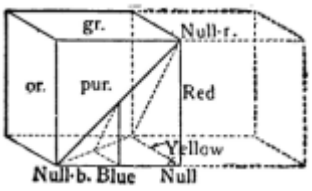


Fig. 120.

Now let the ochre cube turn out and the brown cube come in. The dotted lines show the position the ochre cube has left (fig. 120). [Pg 196]

Here we see three out of the four points through which the cutting plane passes, null *r*, null *y*, and null *b*. The plane they determine lies in the cutting space, and this plane cuts out of the brown cube a triangle with orange, purple and green sides, and null points. The orange line of this figure is the same as the orange line in the last figure.

Now let the light purple cube swing into our space, towards us, fig. 121.

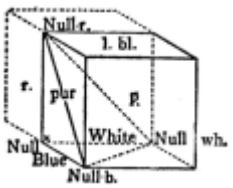


Fig. 121.

The cutting space which passes through the four points, null *r*, *y*, *wh*, *b*, passes through the null *r*, *wh*, *b*, and therefore the plane these determine lies in the cutting space.

This triangle lies before us. It has a light purple interior and pink, light blue, and purple edges with null points.

This, since it is all of the plane that is common to it, and this bounding of the tesseract, gives us one of the bounding faces of our sectional figure. The pink line in it is the same as the pink line we found in the first figure—that of the ochre cube.

Finally, let the tesseract swing about the light yellow plane, so that the light green cube comes into our space. It will point downwards.

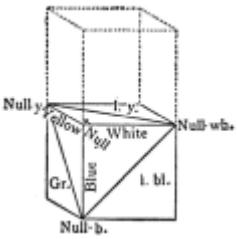


Fig. 122.

The three points, *n.y*, *n.wh*, *n.b*, are in the cutting space, and the triangle they determine is common to the tesseract and the cutting space. Hence this boundary is a triangle having a light yellow line, which is the same as the light yellow line of the first figure, a light blue line and a green line. [Pg 197]

We have now traced the cutting space between every set of three that can be made out of the four points in which it cuts the tesseract, and have got four faces which all join on to each other by lines.

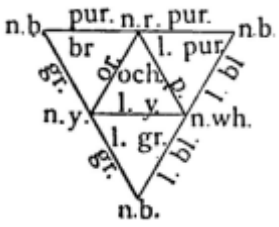


Fig. 123.

The triangles are shown in fig. 123 as they join on to the triangle in the ochre cube. But they join on each to the other in an exactly similar manner; their edges are all identical two and two. They form a closed figure, a tetrahedron, enclosing a light brown portion which is the portion of the cutting space which lies inside the tesseract.

We cannot expect to see this light brown portion, any more than a plane being could expect to see the inside of a cube if an angle of it were pushed through his plane. All he can do is to come upon the boundaries of it in a different way to that in which he would if it passed straight through his plane.

Thus in this solid section; the whole interior lies perfectly open in the fourth dimension. Go round it as we may we are simply looking at the boundaries of the tesseract which penetrates through our solid sheet. If the tesseract were not to pass across so far, the triangle would be smaller; if it were to pass farther, we should have a different figure, the outlines of which can be determined in a similar manner. [Pg 198]

The preceding method is open to the objection that it depends rather on our inferring what must be, than our seeing what is. Let us therefore consider our sectional space as consisting of a number of planes, each very close to the last, and observe what is to be found in each plane.

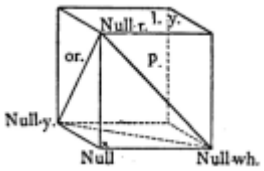


Fig. 124.

The corresponding method in the case of two dimensions is as follows:—The plane being can see that line of the sectional plane through null *y*, null *wh*, null *r*, which lies in the orange plane. Let him now suppose the cube and the section plane to pass half way through his plane. Replacing the red and yellow axes are lines parallel to them, sections of the pink and light yellow faces.

Where will the section plane cut these parallels to the red and yellow axes?

Let him suppose the cube, in the position of the drawing, fig. 124, turned so that the pink face lies against his plane. He can see the line from the null *r* point to the null *wh* point, and can see (compare fig. 119) that it cuts AB a parallel to his red axis, drawn at a point half way along the white line, in a point B, half way up. I shall speak of the axis as having the length of an edge of the cube. Similarly, by letting the cube turn so that the light yellow square swings against his plane, he can see (compare fig. 119) that a parallel to his yellow axis drawn from a point half-way along the white axis, is cut at half its length by the trace of the section plane in the light yellow face.

Hence when the cube had passed half-way through he would have—instead of the orange line with null points, which he had at first—an ochre line of half its length, with pink and light yellow points. Thus, as the cube passed slowly through his plane, he would have a succession of lines gradually diminishing in length and forming an equilateral triangle. The whole interior would be ochre, the line from which it started would be orange. The succession of points at the ends of the succeeding lines would form pink and light yellow lines and the final point would be null. Thus looking at the successive lines in the section plane as it and the cube passed across his plane he would determine the figure cut out bit by bit. [Pg 199]

Coming now to the section of the tesseract, let us imagine that the tesseract and its cutting *space* pass slowly across our space; we can examine portions of it, and their relation to portions of the cutting space. Take the section space which passes through the four points, null *r*, *wh*, *y*, *b*; we can see in the ochre cube (fig. 119) the plane belonging to this section space, which passes through the three extremities of the red, white, yellow axes.

Now let the tesseract pass half way through our space. Instead of our original axes we have parallels to them, purple, light blue, and green, each of the same length as the first axes, for the section of the tesseract is of exactly the same shape as its ochre cube.

But the sectional space seen at this stage of the transference would not cut the section of the tesseract in a plane disposed as at first.

To see where the sectional space would cut these parallels to the original axes let the tesseract swing so that, the orange face remaining stationary, the blue line comes in to the left.

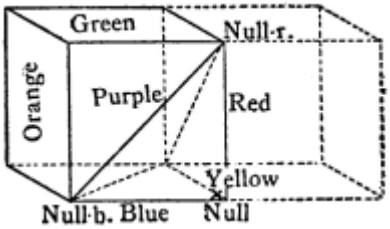


Fig. 125.

Aquí (fig. 125) tenemos los puntos nulos *r* , *y* , *b* , y del espacio seccional todo lo que vemos es el plano que pasa por estos tres puntos. [Pg 200]

En esta figura podemos dibujar los paralelos a los ejes rojo y amarillo y ver que, si comenzaran en un punto a mitad del eje azul, cada uno se cortaría en un punto para tener la mitad de su longitud anterior.

Al hacer girar el teseracto en nuestro espacio alrededor de la cara rosa del cubo ocre, también encontramos que el espacio seccional corta el paralelo al eje blanco a la mitad de su longitud.

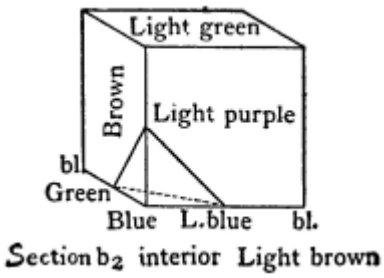


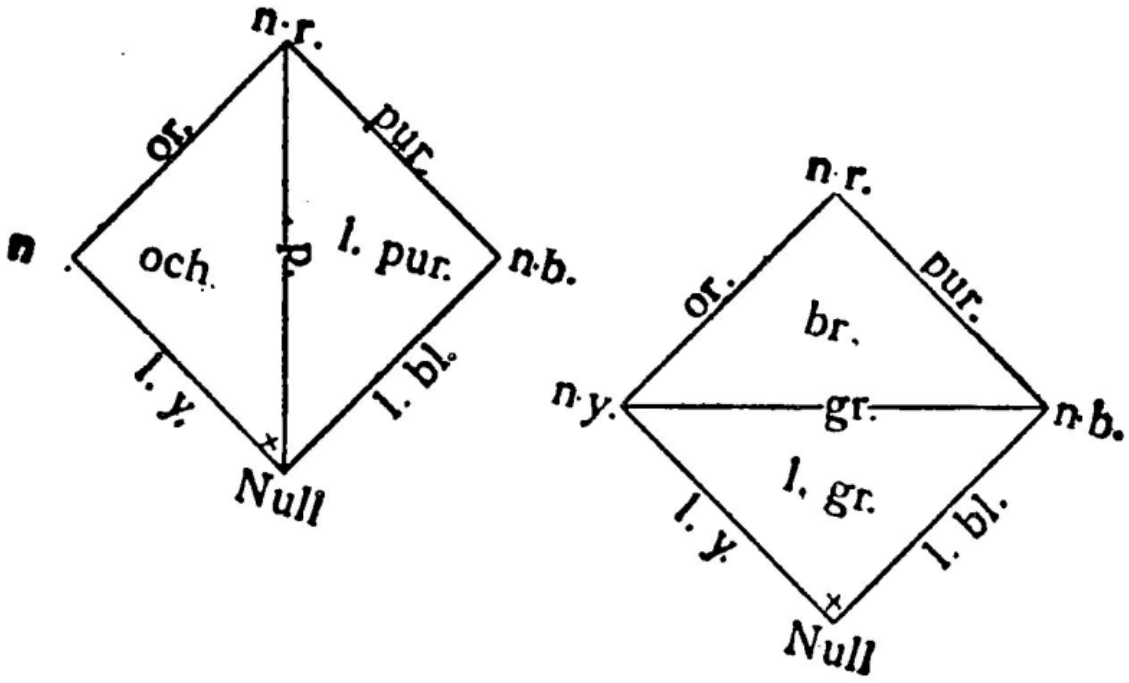
Figura 126.

Por lo tanto, en una sección realizada cuando el teseracto había pasado la mitad de nuestro espacio, los paralelos a los ejes rojo, blanco y amarillo, que ahora están en nuestro espacio, son cortados por la sección espacio, cada uno de ellos a la mitad, y para esta etapa del movimiento transversal deberíamos tener fig. 126 . La sección que hace este cubo por el plano en que lo corta el espacio seccional, es un triángulo equilátero de color morado, l. puntos azules, verdes y l. morado, marrón, l. líneas verdes.

Así, el triángulo ocre original, con puntos nulos y líneas rosadas, naranjas y amarillas claras, sería sucedido por un triángulo coloreado de la manera que acabamos de describir.

Este triángulo inicialmente sería sólo un poco más pequeño que el triángulo original, irá disminuyendo gradualmente, hasta terminar en un punto, un punto nulo. Cada una de sus aristas tendría la misma longitud. Así, los sucesivos Las secciones de los sucesivos [Pág.

planos en los que analizamos el espacio de corte serían un tetraedro de la descripción mostrada (fig. 123), y todo el interior del tetraedro sería de color marrón claro. 201]



Vista frontal. **Las caras traseras.**

Figura 127.

En la Fig. 127 el tetraedro está representado por medio de sus caras como dos triángulos que se encuentran en la p. línea, y dos triángulos traseros que se unen a ellos, suponiéndose que la diagonal de la cara rosa discurre verticalmente hacia arriba.

Ahora hemos llegado a una terminación natural. El lector podrá profundizar más en el tema, pero no encontrará ninguna novedad esencial. Concluyo con una indicación sobre la manera en que las cifras dadas anteriormente pueden usarse para determinar las secciones mediante el método desarrollado anteriormente.

Aplicando este método al teseracto, como se representa en el Capítulo IX., se pueden dibujar secciones formadas por un espacio que corte los ejes equidistantemente a cualquier distancia, y también las secciones de teseractos dispuestas en un bloque.

Si dibujamos un plano, cortando los cuatro ejes en un punto a seis unidades de distancia del nulo, tenemos un espacio inclinado. Este espacio corta los ejes rojo, blanco, amarillo en el puntos LMN (fig. 128), y así en la región de nuestro espacio antes de irnos a la cuarta dimensión, tenemos el plano representado por LMN extendido. Esto es lo que tiene en común el espacio inclinado y nuestro espacio. [Pág. 202]

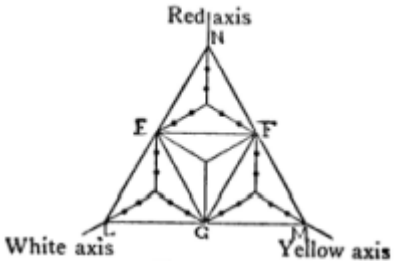


Figura 128.

Este plano corta el cubo ocre en el triángulo EFG .

Comparando esto con (fig. 72) *oh* , vemos que el hexágono allí dibujado es parte del triángulo EFG .

Imaginemos ahora el teseracto y el espacio inclinado ambos juntos pasando transversalmente a nuestro espacio, una distancia de una unidad, tenemos en 1 *h* una sección del teseracto, cuyos ejes son paralelos a los ejes anteriores. El espacio inclinado los corta a una distancia de cinco unidades a lo largo de cada uno. Dibujando el plano a través de estos puntos en 1 *h* se encontrará que corta la sección cúbica del teseracto en la figura hexagonal dibujada. En 2 *h* (fig. 72) el espacio inclinado corta los

paralelos a los ejes a una distancia de cuatro a lo largo de cada uno, y la figura hexagonal es la sección de esta sección del teseracto por él. Finalmente cuando llega 3 *h* en el espacio inclinado se cortan los ejes a una distancia de tres a lo largo de cada uno, y la sección es un triángulo, del cual el hexágono dibujado es una porción truncada. Después de esto, el teseracto, que se extiende sólo tres unidades en cada una de las cuatro dimensiones, ha pasado completamente transversal a nuestro espacio, y ya no hay más que cortar. Por lo tanto, juntando las secciones planas en las relaciones correctas, tenemos la sección determinada por el espacio inclinado particular: es decir, un octaedro.

CAPÍTULO XIV. [6]

[Pág. 203]

RECAPITULACIÓN Y AMPLIACIÓN DEL ARGUMENTO FÍSICO

[6] El contenido de este capítulo está tomado de un artículo leído ante la Sociedad Filosófica de Washington. La parte matemática del artículo apareció en parte en las Actas de la Real Academia Irlandesa bajo el título "Fórmulas de transformación ortogonal de Cayley", el 29 de noviembre de 1903.

Hay dos direcciones de investigación en las que se puede llevar a cabo la investigación de la realidad física de una cuarta dimensión. Una es la investigación de lo infinitamente grande, la otra es la investigación de lo infinitamente pequeño.

Mediante la medición de los ángulos de grandes triángulos, cuyos lados son las distancias entre las estrellas, los astrónomos han tratado de determinar si existe alguna desviación de los valores dados por deducción geométrica. Si los ángulos de un triángulo celeste no suman juntos dos ángulos rectos, habría evidencia de la realidad física de una cuarta dimensión.

This conclusion deserves a word of explanation. If space is really four-dimensional, certain conclusions follow which must be brought clearly into evidence if we are to frame the questions definitely which we put to Nature. To account for our limitation let us assume a solid material sheet against which we move. This sheet must stretch alongside every object in every direction in which it visibly moves. Every material body must slip or slide along this sheet, not deviating from contact with it in any motion which we can observe.

The necessity for this assumption is clearly apparent, if we consider the analogous case of a suppositionary plane world. If there were any creatures whose experiences were confined to a plane, we must account for their limitation. If they were free to move in every space direction, they would have a three-dimensional motion; hence they must be physically limited, and the only way in which we can conceive such a limitation to exist is by means of a material surface against which they slide. The existence of this surface could only be known to them indirectly. It does not lie in any direction from them in which the kinds of motion they know of leads them. If it were perfectly smooth and always in contact with every material object, there would be no difference in their relations to it which would direct their attention to it.

[Pg 204]

But if this surface were curved—if it were, say, in the form of a vast sphere—the triangles they drew would really be triangles of a sphere, and when these triangles are large enough the angles diverge from the magnitudes they would have for the same lengths of sides if the surface were plane. Hence by the measurement of triangles of very great magnitude a plane being might detect a difference from the laws of a plane world in his physical world, and so be led to the conclusion that there was in reality another dimension to space—a third dimension—as well as the two which his ordinary experience made him familiar with.

Now, astronomers have thought it worth while to examine the measurements of vast triangles drawn from one celestial body to another with a view to determine if there is anything like a curvature in our space—that is to say, they have tried astronomical measurements to find out if the vast solid sheet against which, on the supposition of a fourth dimension, everything slides is curved or not. These results have been negative. The solid sheet, if it exists, is not curved or, being curved, has not a sufficient curvature to cause any observable deviation from the theoretical value of the angles calculated.

[Pg 205]

Hence the examination of the infinitely great leads to no decisive criterion. If it did we should have to decide between the present theory and that of metageometry.

Coming now to the prosecution of the inquiry in the direction of the infinitely small, we have to state the question thus: Our laws of movement are derived from the examination of bodies which move in three-dimensional space. All our conceptions are founded on the supposition of a space which is represented analytically by three independent axes and variations along them—that is, it is a space in which there are three independent movements. Any motion possible in it can be compounded out of these three movements, which we may call: up, right, away.

To examine the actions of the very small portions of matter with the view of ascertaining if there is any evidence in the phenomena for the supposition of a fourth dimension of space, we must commence by clearly defining what the laws of mechanics would be on the supposition of a fourth dimension. It is of no use asking if the phenomena of the smallest particles of matter are like—we do not know what. We must have a definite conception of what the laws of motion would be on the supposition of the fourth dimension, and then inquire if the phenomena of the activity of the smaller particles of matter resemble the conceptions which we have elaborated.

Now, the task of forming these conceptions is by no means one to be lightly dismissed. Movement in space has many features which differ entirely from movement on a plane; and when we set about to form the conception of motion in four dimensions, we find that there is at least as great a step as from the plane to three-dimensional space. [Pg 206]

I do not say that the step is difficult, but I want to point out that it must be taken. When we have formed the conception of four-dimensional motion, we can ask a rational question of Nature. Before we have elaborated our conceptions we are asking if an unknown is like an unknown—a futile inquiry.

As a matter of fact, four-dimensional movements are in every way simple and more easy to calculate than three-dimensional movements, for four-dimensional movements are simply two sets of plane movements put together.

Without the formation of an experience of four-dimensional bodies, their shapes and motions, the subject can be but formal—logically conclusive, not intuitively evident. It is to this logical apprehension that I must appeal.

It is perfectly simple to form an experiential familiarity with the facts of four-dimensional movement. The method is analogous to that which a plane being would have to adopt to form an experiential familiarity with three-dimensional movements, and may be briefly summed up as the formation of a compound sense by means of which duration is regarded as equivalent to extension.

Consider a being confined to a plane. A square enclosed by four lines will be to him a solid, the interior of which can only be examined by breaking through the lines. If such a square were to pass transverse to his plane, it would immediately disappear. It would vanish, going in no direction to which he could point.

If, now, a cube be placed in contact with his plane, its surface of contact would appear like the square which we have just mentioned. But if it were to pass transverse to his plane, breaking through it, it would appear as a lasting square. The three-dimensional matter will give a lasting appearance in circumstances under which two-dimensional matter will at once disappear. [Pg 207]

Similarly, a four-dimensional cube, or, as we may call it, a tesseract, which is generated from a cube by a movement of every part of the cube in a fourth direction at right angles to each of the three visible directions in the cube, if it moved transverse to our space, would appear as a lasting cube.

A cube of three-dimensional matter, since it extends to no distance at all in the fourth dimension, would instantly disappear, if subjected to a motion transverse to our space. It would disappear and be gone, without it being possible to point to any direction in which it had moved.

All attempts to visualise a fourth dimension are futile. It must be connected with a time experience in three space.

The most difficult notion for a plane being to acquire would be that of rotation about a line. Consider a plane being facing a square. If he were told that rotation about a line were possible, he would move his square this way and that. A square in a plane can rotate about a point, but to rotate about a line would seem to the plane being perfectly impossible. How could those parts of his square which were on one side of an edge come to the other side without the edge moving? He could understand their reflection in the edge. He could form an idea of the looking-glass image of his square lying on the opposite side of the line of an edge, but by no motion that he knows of can he make the actual square assume that position. The result of the rotation would be like reflection in the edge, but it would be a physical impossibility to produce it in the plane.

The demonstration of rotation about a line must be to him purely formal. If he conceived the notion of a cube stretching out in an unknown direction away from his plane, then he can see the base of it, his square in the plane, rotating round a point. He can likewise apprehend that every parallel section taken at successive intervals in the unknown direction rotates in like manner round a point. Thus he would come to conclude that the whole body rotates round a line—the line consisting of the succession of points round which the plane sections rotate. Thus, given three axes, *x*, *y*, *z*, if *x* rotates to take the place of *y*, and *y* turns so as to point to negative *x*, then the third axis remaining unaffected by this turning is the axis about which the rotation takes place. This, then, would have to be his criterion of the axis of a rotation—that which remains unchanged when a rotation of every plane section of a body takes place. [Pg 208]

There is another way in which a plane being can think about three-dimensional movements; and, as it affords the type by which we can most conveniently think about four-dimensional movements, it will be no loss of time to consider it in detail.

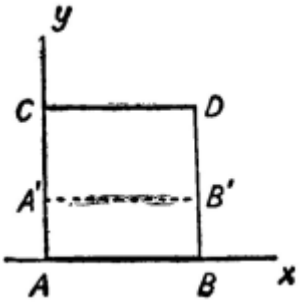


Fig. 1 (129).

We can represent the plane being and his object by figures cut out of paper, which slip on a smooth surface. The thickness of these bodies must be taken as so minute that their extension in the third dimension escapes the observation of the plane being, and he thinks about them as if they were mathematical plane figures in a plane instead of being material bodies capable of moving on a plane surface. Let A*x*, A*y* be two axes and ABCD a square. As far as movements in the plane are concerned, the square can rotate about a point A, for example. It cannot rotate about a side, such as AC.

But if the plane being is aware of the existence of a third dimension he can study the movements possible in the ample space, taking his figure portion by portion. [Pg 209]

His plane can only hold two axes. But, since it can hold two, he is able to represent a turning into the third dimension if he neglects one of his axes and represents the third axis as lying in his plane. He can make a drawing in his plane of what stands up perpendicularly from his plane. Let A*z* be the axis, which stands perpendicular to his plane at A. He can draw in his plane two lines to represent the two axes, A*x* and A*z*. Let Fig. 2 be this drawing. Here the *z* axis has taken the place of the *y* axis, and the plane of A*x* A*z* is represented in his plane. In this figure all that exists of the square ABCD will be the line AB.

The square extends from this line in the *y* direction, but more of that direction is represented in Fig. 2. The plane being can study the turning of the line AB in this diagram. It is simply a case of plane turning around the point A. The line AB occupies intermediate portions like AB_1 and after half a revolution will lie on A*x* produced through A.

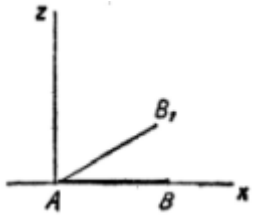


Fig. 2 (130).

Now, in the same way, the plane being can take another point, A′, and another line, A′B′, in his square. He can make the drawing of the two directions at A′, one along A′B′, the other perpendicular to his plane. He will obtain a figure precisely similar to Fig. 2, and will see that, as AB can turn around A, so A′C′ around A.

In this turning AB and A′B′ would not interfere with each other, as they would if they moved in the plane around the separate points A and A′.

Hence the plane being would conclude that a rotation round a line was possible. He could see his square as it began to make this turning. He could see it half way round when it came to lie on the opposite side of the line AC. But in intermediate portions he could not see it, for it runs out of the plane. [Pg 210]

Coming now to the question of a four-dimensional body, let us conceive of it as a series of cubic sections, the first in our space, the rest at intervals, stretching away from our space in the unknown direction.

We must not think of a four-dimensional body as formed by moving a three-dimensional body in any direction which we can see.

Consulte por un momento la figura 3. El punto A , moviéndose hacia la derecha, traza la línea AC . La recta AC , alejándose en una nueva dirección, traza el cuadrado ACEG en la base del cubo. El cuadrado AEGC , moviéndose en una nueva dirección, trazará el cubo ACEGBDHF . La dirección vertical de este último movimiento no es idéntica a ningún movimiento posible en el plano de la base del cubo. Es una dirección completamente nueva, en ángulo recto con cada línea que se puede dibujar en la base. Para trazar un teseracto, el cubo debe moverse en una nueva dirección: una dirección en ángulo recto con todas y cada una de las líneas que se pueden dibujar en el espacio del cubo.

Las secciones cúbicas del teseracto están relacionadas con el cubo que vemos, como las secciones cuadradas del cubo están relacionadas con el cuadrado de su base que ve un ser plano.

Imaginemos que el cubo de nuestro espacio, que es la base de un teseracto, gira sobre una de sus aristas. La rotación arrastrará consigo todo el cuerpo, y cada una de las secciones cúbicas girará. El eje que vemos en nuestro espacio permanecerá inalterado, al igual que la serie de ejes paralelos a él sobre los que gira cada una de las secciones cúbicas paralelas. El conjunto de todos estos es un avión.

Por tanto, en cuatro dimensiones un cuerpo gira alrededor de un plano. No existe la rotación alrededor de un eje.

Podemos considerar la rotación desde un punto de vista diferente. Considere cuatro ejes independientes, cada uno en ángulo recto con todos los demás, dibujados en un cuerpo de cuatro dimensiones. De estos cuatro ejes podemos ver tres cualesquiera. El cuarto se extiende normal a nuestro espacio. [Pág. 211]

La rotación es el giro de un eje en un segundo, y el segundo giro toma el lugar del negativo del primero. Se trata de dos ejes. Así, en esta rotación de un cuerpo de cuatro dimensiones, dos ejes cambian y dos permanecen en reposo. La rotación en cuatro dimensiones es, por tanto, un giro alrededor de un plano.

Como en el caso de un ser plano, el resultado de la rotación alrededor de una línea aparecería como la producción de una imagen de espejo del objeto original al otro lado de la línea, por lo que para nosotros es el resultado de una rotación en cuatro dimensiones. parecería la producción de la imagen de un espejo de un cuerpo al otro lado de un avión. El plano sería el eje de rotación, y el recorrido del cuerpo entre sus dos apariciones sería inimaginable en el espacio tridimensional.

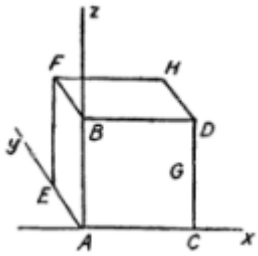


Figura 3 (131).

Apliquemos ahora el método mediante el cual un ser plano podría examinar la naturaleza de la rotación alrededor de una línea en nuestro examen de la rotación alrededor de un plano. La figura 3 representa un cubo en nuestro espacio, cuyos tres ejes x , y , z denotan sus tres dimensiones. Sea w la cuarta dimensión. Ahora bien, como en nuestro espacio podemos representar tres dimensiones cualesquiera, podemos, si así lo deseamos, hacer una representación de lo que hay en el espacio determinado por los tres ejes x , z , w . Este es un espacio tridimensional determinado por dos de los ejes que hemos dibujado, x y z , y en lugar de y el cuarto eje, w . No podemos, manteniendo x y z , tener tanto y como w en nuestro espacio; entonces dejaremos ir y y dibujaremos w en su lugar. ¿Cuál será nuestra visión del cubo? [Página 212]

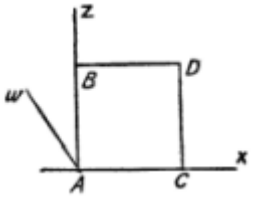


Figura 4 (132).

Evidentemente tendremos simplemente el cuadrado que está en el plano de xz , el cuadrado ACDB . El resto del cubo se extiende en la dirección y y, como no tenemos nada del espacio así determinado, sólo tenemos la cara del cubo. Esto está representado en la fig. 4 .

Ahora supongamos que todo el cubo se gira desde la dirección x a la w . Conforme a nuestro método, no tomaremos en consideración todo el cubo de una vez, sino que comenzaremos por la cara ABCD .

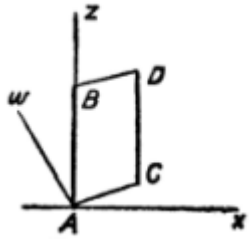


Figura 5 (133).

Deja que esta cara comience a cambiar. La Fig. 5 representa una de las posiciones que ocupará; la recta AB permanece en el eje z . El resto de la cara se extiende entre las direcciones x y w .

Ahora, como podemos tomar tres ejes cualesquiera, observemos lo que hay en el espacio de zyw y examinemos el giro allí. Ahora debemos dejar que el eje z desaparezca y dejar que el eje w corra en la dirección en la que corría z .

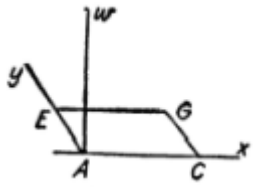


Figura 6 (134).

Haciendo esta representación ¿qué vemos del cubo? Evidentemente sólo vemos la cara inferior. El resto del cubo se encuentra en el espacio de xyz . En el espacio de xyz tenemos simplemente la base del cubo que se encuentra en el plano de xy , como se muestra en la fig. 6 .

Ahora deje que se produzca el giro *de* x a w . El cuadrado ACEG girará alrededor de la recta AE . Este borde permanecerá a lo largo del eje y y será estacionario, sin importar cuánto gire el cuadrado.

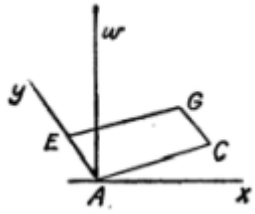


Figura 7 (135).

Por lo tanto, si el cubo se gira mediante un giro de x a w , tanto el borde AB como el borde AC permanecen estacionarios; por tanto, toda la cara ABEF en el plano yz permanece fija. El giro se ha producido alrededor de la cara ABEF . [Pág. 213]

Supongamos que este giro continúa hasta que AC corre hacia la izquierda desde A. El cubo ocupará la posición que se muestra en la fig. 8 . Esta es la imagen del espejo del cubo en la fig. 3 . Sin ninguna rotación en el espacio tridimensional se puede sacar el cubo de la posición de la fig. 3 al mostrado en la fig. 8 .

Podemos pensar en este giro como un giro de la cara ABCD alrededor de AB , y un giro de cada sección paralela a ABCD alrededor de la línea vertical en la que corta la cara ABEF

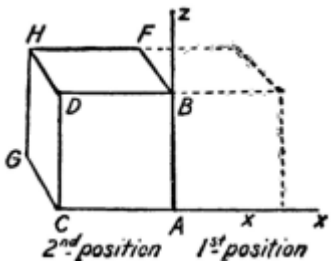


Figura 8 (136).

, siendo el espacio en el que se produce el giro diferente de aquello en el que se encuentra el cubo.

Una de las condiciones, entonces, de nuestra investigación en dirección a lo infinitamente pequeño es que nos formemos el concepto de una rotación alrededor de un plano. La producción de un cuerpo en un estado en el que presenta la apariencia de una imagen de espejo de su estado anterior es el criterio para una rotación cuatridimensional.

Hay alguna evidencia de la ocurrencia de tales transformaciones de cuerpos en el cambio de cuerpos de aquellos que producen una polarización de la luz hacia la derecha a aquellos que producen una polarización hacia la izquierda; pero no es éste un punto al que pueda atribuirse gran importancia.

Aún así, a este respecto, permítanme citar una observación de Discurso del Prof. John G. McKendrick sobre Fisiología ante la Asociación Británica en Glasgow. Al discutir la posibilidad de la producción hereditaria de características a través de la estructura material del óvulo, estima que en él existen 12.000.000.000 de bióforos, o partículas últimas de materia viva, un número suficiente para dar cuenta de la transmisión hereditaria, y observa: “Así es Es concebible que las actividades vitales también puedan estar determinadas por el tipo de movimiento que tiene lugar en las moléculas de aquello que llamamos materia viva. Puede ser de naturaleza diferente a algunos de los movimientos conocidos por los físicos, y es concebible que la vida sea la transmisión a la materia muerta, cuyas moléculas ya tienen un tipo especial de movimiento, una forma de movimiento *sui generis* . [Pág. 214]

Ahora bien, en el reino de los seres orgánicos, las estructuras simétricas (aquellas con simetría derecha e izquierda) son evidentes por todas partes. Suponiendo que existan cuatro dimensiones, el giro más simple produce la forma de la imagen, y mediante un plegado se podrían producir estructuras duplicadas a derecha e izquierda, tal como es el caso de la simetría en un plano.

Así, una característica muy general de las formas de los organismos podría explicarse mediante la suposición de que en el proceso de la vida interviene un movimiento cuatridimensional.

Pero no sé si los movimientos cuatridimensionales corresponden o no en otros aspectos a la exigencia del fisiólogo de un tipo especial de movimiento. Nuestro negocio es la evidencia de su existencia en la física. Para ello es necesario examinar el significado de la rotación alrededor de un plano en el caso de materias extensibles y fluidas.

Detengámonos un momento más en la rotación de un cuerpo rígido. Mirando el cubo de la fig. 3 , que gira alrededor la cara de ABFE , vemos que cualquier línea en la cara puede tomar el lugar de las líneas verticales y horizontales que hemos examinado. Tome la línea diagonal AF y la sección que la atraviesa hasta GH . Las porciones de materia que estaban a un lado de AF en esta sección de la fig. 3 están en el lado opuesto en la fig. 8 . Han dado la vuelta a la línea AF . Así, la rotación alrededor de una cara puede considerarse como el número de rotaciones de secciones alrededor de líneas paralelas en ella. [Pág. 215]

La rotación alrededor de dos líneas diferentes es imposible en el espacio tridimensional. Para tomar otro ejemplo, supongamos que A y B son dos rectas paralelas en el plano *xy* , y sean CD y EF dos varillas que las cruzan. Ahora bien, en el espacio de *xyz* , si las varillas giran alrededor de las líneas A y B en la misma dirección formarán dos círculos independientes.

When the end F is going down the end C will be coming up. They will meet and conflict.

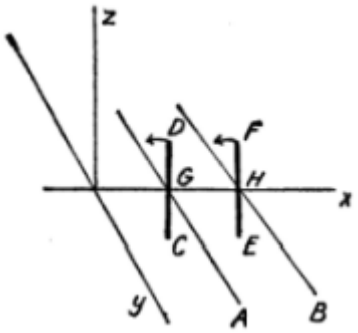


Fig. 9 (137).

But if we rotate the rods about the plane of AB by the *z* to *w* rotation these movements will not conflict. Suppose all the figure removed with the exception of the plane *xz*, and from this plane draw the axis of *w*, so that we are looking at the space of *xzw*.

Here, fig. 10, we cannot see the lines A and B. We see the points G and H, in which A and B intercept the *x* axis, but we cannot see the lines themselves, for they run in the *y* direction, and that is not in our drawing.

Now, if the rods move with the *z* to *w* rotation they will turn in parallel planes, keeping their relative positions. The point D, for instance, will describe a circle. At one time it will be above the line A, at another time below it. Hence it rotates round A. [Pg 216]

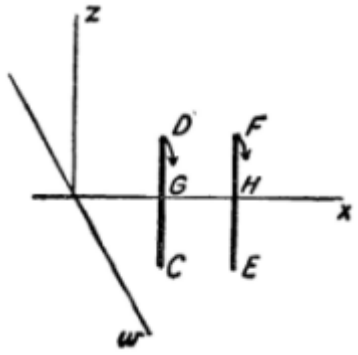


Fig. 10 (138).

Not only two rods but any number of rods crossing the plane will move round it harmoniously. We can think of this rotation by supposing the rods standing up from one line to move round that line and remembering that it is not inconsistent with this rotation for the rods standing up along another line also to move round it, the relative positions of all the rods being preserved. Now, if the rods are thick together, they may represent a disk of matter, and we see that a disk of matter can rotate round a central plane.

Rotation round a plane is exactly analogous to rotation round an axis in three dimensions. If we want a rod to turn round, the ends must be free; so if we want a disk of matter to turn round its central plane by a four-dimensional turning, all the contour must be free. The whole contour corresponds to the ends of the rod. Each point of the contour can be looked on as the extremity of an axis in the body, round each point of which there is a rotation of the matter in the disk.

If the one end of a rod be clamped, we can twist the rod, but not turn it round; so if any part of the contour of a disk is clamped we can impart a twist to the disk, but not turn it round its central plane. In the case of extensible materials a long, thin rod will twist round its axis, even when the axis is curved, as, for instance, in the case of a ring of India rubber.

In an analogous manner, in four dimensions we can have rotation round a curved plane, if I may use the expression. A sphere can be turned inside out in four dimensions. [Pg 217]

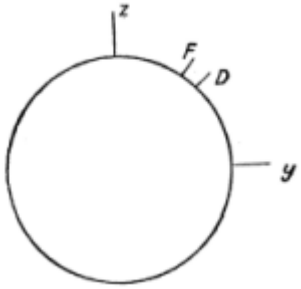


Fig. 11 (139).

Let fig. 11 represent a spherical surface, on each side of which a layer of matter exists. The thickness of the matter is represented by the rods CD and EF, extending equally without and within.

Now, take the section of the sphere by the *yz* plane we have a circle—fig. 12. Now, let the *w* axis be drawn in place of the *x* axis so that we have the space of *yzw* represented. In this space all that there will be seen of the sphere is the circle drawn.

Here we see that there is no obstacle to prevent the rods turning round. If the matter is so elastic that it will give enough for the particles at E and C to be separated as they are at

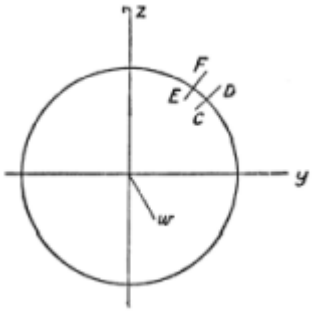


Fig. 12 (140).

F and D, they can rotate round to the position D and F, and a similar motion is possible for all other particles. There is no matter or obstacle to prevent them from moving out in the *w* direction, and then on round the circumference as an axis. Now, what will hold for one section will hold for all, as the fourth dimension is at right angles to all the sections which can be made of the sphere. [Pg 218]

We have supposed the matter of which the sphere is composed to be three-dimensional. If the matter had a small thickness in the fourth dimension, there would be a slight thickness in fig. 12 above the plane of the paper—a thickness equal to the thickness of the matter in the fourth dimension. The rods would have to be replaced by thin slabs. But this would make no difference as to the possibility of the rotation. This motion is discussed by Newcomb in the first volume of the *American Journal of Mathematics*.

Let us now consider, not a merely extensible body, but a liquid one. A mass of rotating liquid, a whirl, eddy, or vortex, has many remarkable properties. On first consideration we should expect the rotating mass of liquid immediately to spread off and lose itself in the surrounding liquid. The water flies off a wheel whirled round, and we should expect the rotating liquid to be dispersed. But see the eddies in a river strangely persistent. The rings that occur in puffs of smoke and last so long are whirls or vortices curved round so that their opposite ends join together. A cyclone will travel over great distances.

Helmholtz was the first to investigate the properties of vortices. He studied them as they would occur in a perfect fluid—that is, one without friction of one moving portion or another. In such a medium vortices would be indestructible. They would go on for ever, altering their shape, but consisting always of the same portion of the fluid. But a straight vortex could not exist surrounded entirely by the fluid. The ends of a vortex must reach to some boundary inside or outside the fluid.

A vortex which is bent round so that its opposite ends join is capable of existing, but no vortex has a free end in the fluid. The fluid round the vortex is always in motion, and one produces a definite movement in another. [Pg 219]

Lord Kelvin has proposed the hypothesis that portions of a fluid segregated in vortices account for the origin of matter. The properties of the ether in respect of its capacity of propagating disturbances can be explained by the assumption of vortices in it instead of by a property of rigidity. It is difficult to conceive, however, of any arrangement of the vortex rings and endless vortex filaments in the ether.

Now, the further consideration of four-dimensional rotations shows the existence of a kind of vortex which would make an ether filled with a homogeneous vortex motion easily thinkable.

To understand the nature of this vortex, we must go on and take a step by which we accept the full significance of the four-dimensional hypothesis. Granted four-dimensional axes, we have seen that a rotation of one into another leaves two unaltered, and these two form the axial plane about which the rotation takes place. But what about these two? Do they necessarily remain motionless? There is nothing to prevent a rotation of these two, one into the other, taking place concurrently with the first rotation. This possibility of a double rotation deserves the most careful attention, for it is the kind of movement which is distinctly typical of four dimensions.

Rotation round a plane is analogous to rotation round an axis. But in three-dimensional space there is no motion analogous to the double rotation, in which, while axis 1 changes into axis 2, axis 3 changes into axis 4.

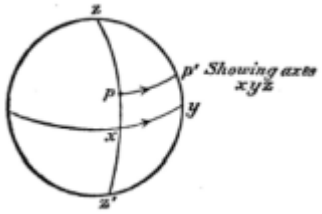
Consider a four-dimensional body, with four independent axes, *x*, *y*, *z*, *w*. A point in it can move in only one direction at a given moment. If the body has a velocity of rotation by which the *x* axis changes into the *y* axis and all parallel sections move in a similar manner, then the point will describe a circle. If, now, in addition to the rotation by which the *x* axis changes into the *y* axis the body has a rotation by which the *z* axis turns into the *w* axis, the point in question will have a double motion in consequence of the two turnings. The motions will compound, and the point will describe a circle, but not the same circle which it would describe in virtue of either rotation separately. [Pg 220]

We know that if a body in three-dimensional space is given two movements of rotation they will combine into a single movement of rotation round a definite axis. It is in no different condition from that in which it is subjected to one movement of rotation. The direction of the axis changes; that is all. The same is not true about a four-dimensional body. The two rotations, *x* to *y* and *z* to *w*, are independent. A body subject to the two is in a totally different condition to that which it is in when subject to one only. When subject to a rotation such as that of *x* to *y*, a whole plane in the body, as we have seen, is stationary. When subject to the double rotation no part of the body is stationary except the point common to the two planes of rotation.

If the two rotations are equal in velocity, every point in the body describes a circle. All points equally distant from the stationary point describe circles of equal size.

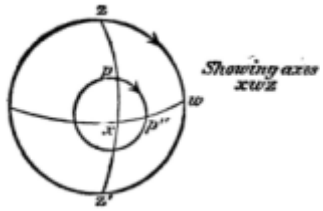
We can represent a four-dimensional sphere by means of two diagrams, in one of which we take the three axes, *x*, *y*, *z*; in the other the axes *x*, *w*, and *z*. In fig. 13 we have the view of a four-dimensional sphere in the space of *xyz*. Fig. 13 shows all that we can see of the four sphere in the space of *xyz*, for it represents all the points in that space, which are at an equal distance from the centre.

Let us now take the *xz* section, and let the axis of *w* take the place of the *y* axis. Here, in fig. 14, we have the space of *xzw*. In this space we have to take all the points which are at the same distance from the centre, consequently we have another sphere. If we had a three-dimensional sphere, as has been shown before, we should have merely a circle in the *xzw* space, the *xz* circle seen in the space of *xzw*. But now, taking the view in the space of *xzw*, we have a sphere in that space also. In a similar manner, whichever set of three axes we take, we obtain a sphere. [Pg 221]



Showing axes xyz
Fig. 13 (141).

In fig. 13, let us imagine the rotation in the direction *xy* to be taking place. The point *x* will turn to *y*, and *p* to *p*′. The axis *zz*′ remains stationary, and this axis is all of the plane *zw* which we can see in the space section exhibited in the figure.



Showing axes xwz
Fig. 14 (142).

In fig. 14, imagine the rotation from *z* to *w* to be taking place. The *w* axis now occupies the position previously occupied by the *y* axis. This does not mean that the *w* axis can coincide with the *y* axis. It indicates that we are looking at the four-dimensional sphere from a different point of view. Any three-space view will show us three axes, and in fig. 14 we are looking at *xzw*.

The only part that is identical in the two diagrams is the circle of the *x* and *z* axes, which axes are contained in both diagrams. Thus the plane *zxz*′ is the same in both, and the point *p* represents the same point in both diagrams. Now, in fig. 14 let the *zw* rotation take place, the *z* axis will turn toward the point *w* of the *w* axis, and the point *p* will move in a circle about the point *x*. [Pg 222]

Thus in fig. 13 the point *p* moves in a circle parallel to the *xy* plane; in fig. 14 it moves in a circle parallel to the *zw* plane, indicated by the arrow.

Now, suppose both of these independent rotations compounded, the point *p* will move in a circle, but this circle will coincide with neither of the circles in which either one of the rotations will take it. The circle the point *p* will move in will depend on its position on the surface of the four sphere.

In this double rotation, possible in four-dimensional space, there is a kind of movement totally unlike any with which we are familiar in three-dimensional space. It is a requisite preliminary to the discussion of the behaviour of the small particles of matter, with a view to determining whether they show the characteristics of four-dimensional movements, to become familiar with the main characteristics of this double rotation. And here I must rely on a formal and logical assent rather than on the intuitive apprehension, which can only be obtained by a more detailed study.

In the first place this double rotation consists in two varieties or kinds, which we will call the A and B kinds. Consider four axes, *x*, *y*, *z*, *w*. The rotation of *x* to *y* can be accompanied with the rotation of *z* to *w*. Call this the A kind.

But also the rotation of *x* to *y* can be accompanied by the rotation, of not *z* to *w*, but *w* to *z*. Call this the B kind.

They differ in only one of the component rotations. One is not the negative of the other. It is the semi-negative. The opposite of an *x* to *y*, *z* to *w* rotation would be *y* to *x*, *w* to *z*. The semi-negative is *x* to *y* and *w* to *z*.

If four dimensions exist and we cannot perceive them, because the extension of matter is so small in the fourth dimension that all movements are withheld from direct observation except those which are three-dimensional, we should not observe these double rotations, but only the effects of them in three-dimensional movements of the type with which we are familiar. [Pg 223]

If matter in its small particles is four-dimensional, we should expect this double rotation to be a universal characteristic of the atoms and molecules, for no portion of matter is at rest. The consequences of this corpuscular motion can be perceived, but only under the form of ordinary rotation or displacement. Thus, if the theory of four dimensions is true, we have in the corpuscles of matter a whole world of movement, which we can never study directly, but only by means of inference.

The rotation A, as I have defined it, consists of two equal rotations—one about the plane of *zw*, the other about the plane of *xy*. It is evident that these rotations are not necessarily equal. A body may be moving with a double rotation, in which these two independent components are not equal; but in such a case we can consider the body to be moving with a composite rotation—a rotation of the A or B kind and, in addition, a rotation about a plane.

If we combine an A and a B movement, we obtain a rotation about a plane; for, the first being *x* to *y* and *z* to *w*, and the second being *x* to *y* and *w* to *z*, when they are put together the *z* to *w* and *w* to *z* rotations neutralise each other, and we obtain an *x* to *y* rotation only, which is a rotation about the plane of *zw*. Similarly, if we take a B rotation, *y* to *x* and *z* to *w*, we get, on combining this with the A rotation, a rotation of *z* to *w* about the *xy* plane. In this case the plane of rotation is in the three-dimensional space of *xyz*, and we have—what has been described before—a twisting about a plane in our space. [Pg 224]

Consider now a portion of a perfect liquid having an A motion. It can be proved that it possesses the properties of a vortex. It forms a permanent individuality—a separated-out portion of the liquid—accompanied by a motion of the surrounding liquid. It has properties analogous to those of a vortex filament. But it is not necessary for its existence that its ends should reach the boundary of the liquid. It is self-contained and, unless disturbed, is circular in every section.

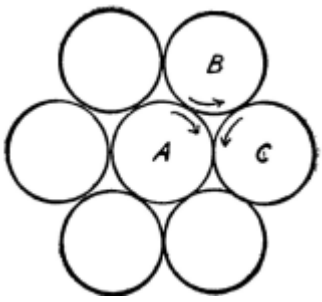


Fig. 15 (143).

If we suppose the ether to have its properties of transmitting vibration given it by such vortices, we must inquire how they lie together in four-dimensional space. Placing a circular disk on a plane and surrounding it by six others, we find that if the central one is given a motion of rotation, it imparts to the others a rotation which is antagonistic in every two adjacent ones. If A goes round, as shown by the arrow, B and C will be moving in opposite ways, and each tends to destroy the motion of the other.

Now, if we suppose spheres to be arranged in a corresponding manner in three-dimensional space, they will be grouped in figures which are for three-dimensional space what hexagons are for plane space. If a number of spheres of soft clay be pressed together, so as to fill up the interstices, each will assume the form of a fourteen-sided figure called a tetrakaidecagon.

Now, assuming space to be filled with such tetrakaidecagons, and placing a sphere in each, it will be found that one sphere is touched by eight others. The remaining six spheres of the fourteen which surround the central one will not touch it, but will touch three of those in contact with it. Hence, if the central sphere rotates, it will not necessarily drive those around it so that their motions will be antagonistic to each other, but the velocities will not arrange themselves in a systematic manner. [Pg 225]

In four-dimensional space the figure which forms the next term of the series hexagon, tetrakaidecagon, is a thirty-sided figure. It has for its faces ten solid tetrakaidecagons and twenty hexagonal prisms. Such figures will exactly fill four-dimensional space, five of them meeting at every point. If, now, in each of these figures we suppose a solid four-dimensional sphere to be placed, any one sphere is surrounded by thirty others. Of these it touches ten, and, if it rotates, it drives the rest by means of these. Now, if we imagine the central sphere to be given an A or a B rotation, it will turn the whole mass of sphere round in a systematic manner. Suppose four-dimensional space to be filled with such spheres, each rotating with a double rotation, the whole mass would form one consistent system of motion, in which each one drove every other one, with no friction or lagging behind.

Every sphere would have the same kind of rotation. In three-dimensional space, if one body drives another round the second body rotates with the opposite kind of rotation; but in four-dimensional space these four-dimensional spheres would each have the double negative of the rotation of the one next it, and we have seen that the double negative of an A or B rotation is still an A or B rotation. Thus four-dimensional space could be filled with a system of self-preservative living energy. If we imagine the four-dimensional spheres to be of liquid and not of solid matter, then, even if the liquid were not quite perfect and there were a slight retarding effect of one vortex on another, the system would still maintain itself. [Pg 226]

In this hypothesis we must look on the ether as possessing energy, and its transmission of vibrations, not as the conveying of a motion imparted from without, but as a modification of its own motion.

We are now in possession of some of the conceptions of four-dimensional mechanics, and will turn aside from the line of their development to inquire if there is any evidence of their applicability to the processes of nature.

Is there any mode of motion in the region of the minute which, giving three-dimensional movements for its effect, still in itself escapes the grasp of our mechanical theories? I would point to electricity. Through the labours of Faraday and Maxwell we

are convinced that the phenomena of electricity are of the nature of the stress and strain of a medium; but there is still a gap to be bridged over in their explanation—the laws of elasticity, which Maxwell assumes, are not those of ordinary matter. And, to take another instance: a magnetic pole in the neighbourhood of a current tends to move. Maxwell has shown that the pressures on it are analogous to the velocities in a liquid which would exist if a vortex took the place of the electric current: but we cannot point out the definite mechanical explanation of these pressures. There must be some mode of motion of a body or of the medium in virtue of which a body is said to be electrified.

Take the ions which convey charges of electricity 500 times greater in proportion to their mass than are carried by the molecules of hydrogen in electrolysis. In respect of what motion can these ions be said to be electrified? It can be shown that the energy they possess is not energy of rotation. Think of a short rod rotating. If it is turned over it is found to be rotating in the opposite direction. Now, if rotation in one direction corresponds to positive electricity, rotation in the opposite direction corresponds to negative electricity, and the smallest electrified particles would have their charges reversed by being turned over—an absurd supposition. [Pg 227]

If we fix on a mode of motion as a definition of electricity, we must have two varieties of it, one for positive and one for negative; and a body possessing the one kind must not become possessed of the other by any change in its position.

All three-dimensional motions are compounded of rotations and translations, and none of them satisfy this first condition for serving as a definition of electricity.

But consider the double rotation of the A and B kinds. A body rotating with the A motion cannot have its motion transformed into the B kind by being turned over in any way. Suppose a body has the rotation x to y and z to w. Turning it about the xy plane, we reverse the direction of the motion x to y. But we also reverse the z to w motion, for the point at the extremity of the positive z axis is now at the extremity of the negative z axis, and since we have not interfered with its motion it goes in the direction of position w. Hence we have y to x and w to z, which is the same as x to y and z to w. Thus both components are reversed, and there is the A motion over again. The B kind is the semi-negative, with only one component reversed.

Hence a system of molecules with the A motion would not destroy it in one another, and would impart it to a body in contact with them. Thus A and B motions possess the first requisite which must be demanded in any mode of motion representative of electricity.

Let us trace out the consequences of defining positive electricity as an A motion and negative electricity as a B motion. The combination of positive and negative electricity produces a current. Imagine a vortex in the ether of the A kind and unite with this one of the B kind. An A motion and B motion produce rotation round a plane, which is in the ether a vortex round an axial surface. It is a vortex of the kind we represent as a part of a sphere turning inside out. Now such a vortex must have its rim on a boundary of the ether —on a body in the ether. [Pg 228]

Let us suppose that a conductor is a body which has the property of serving as the terminal abutment of such a vortex. Then the conception we must form of a closed current is of a vortex sheet having its edge along the circuit of the conducting wire. The whole wire will then be like the centres on which a spindle turns in three-dimensional space, and any interruption of the continuity of the wire will produce a tension in place of a continuous revolution.

As the direction of the rotation of the vortex is from a three-space direction into the fourth dimension and back again, there will be no direction of flow to the current; but it will have two sides, according to whether z goes to w or z goes to negative w.

We can draw any line from one part of the circuit to another; then the ether along that line is rotating round its points.

This geometric image corresponds to the definition of an electric circuit. It is known that the action does not lie in the wire, but in the medium, and it is known that there is no direction of flow in the wire.

No explanation has been offered in three-dimensional mechanics of how an action can be impressed throughout a region and yet necessarily run itself out along a closed boundary, as is the case in an electric current. But this phenomenon corresponds exactly to the definition of a four-dimensional vortex.

If we take a very long magnet, so long that one of its poles is practically isolated, and put this pole in the vicinity of an electric circuit, we find that it moves. [Pg 229]

Now, assuming for the sake of simplicity that the wire which determines the current is in the form of a circle, if we take a number of small magnets and place them all pointing in the same direction normal to the plane of the circle, so that they fill it and the wire binds them round, we find that this sheet of magnets has the same effect on the magnetic pole that the current has. The sheet of magnets may be curved, but the edge of it must coincide with the wire. The collection of magnets is then equivalent to the vortex sheet, and an elementary magnet to a part of it. Thus, we must think of a magnet as conditioning a rotation in the ether round the plane which bisects at right angles the line joining its poles.

If a current is started in a circuit, we must imagine vortices like bowls turning themselves inside out, starting from the contour. In reaching a parallel circuit, if the vortex sheet were interrupted and joined momentarily to the second circuit by a free rim, the axis plane would lie between the two circuits, and a point on the second circuit opposite a point on the first would correspond to a point opposite to it on the first; hence we should expect a current in the opposite direction in the second circuit. Thus the phenomena of induction are not inconsistent with the hypothesis of a vortex about an axial plane.

In four-dimensional space, in which all four dimensions were commensurable, the intensity of the action transmitted by the medium would vary inversely as the cube of the distance. Now, the action of a current on a magnetic pole varies inversely as the square of the distance; hence, over measurable distances the extension of the ether in the fourth dimension cannot be assumed as other than small in comparison with those distances.

If we suppose the ether to be filled with vortices in the shape of four-dimensional spheres rotating with the A motion, the B motion would correspond to electricity in the one-fluid theory. There would thus be a possibility of electricity existing in two forms, statically, by itself, and, combined with the universal motion, in the form of a current. [Pg 230]

To arrive at a definite conclusion it will be necessary to investigate the resultant pressures which accompany the collocation of solid vortices with surface ones.

To recapitulate:

The movements and mechanics of four-dimensional space are definite and intelligible. A vortex with a surface as its axis affords a geometric image of a closed circuit, and there are rotations which by their polarity afford a possible definition of statical electricity.[7]

[7] These double rotations of the A and B kinds I should like to call Hamiltons and co-Hamiltons, for it is a singular fact that in his “Quaternions” Sir Wm. Rowan Hamilton has given the theory of either the A or the B kind. They follow the laws of his symbols, I, J, K.

Hamiltons and co-Hamiltons seem to be natural units of geometrical expression. In the paper in the “Proceedings of the Royal Irish Academy,” Nov. 1903, already alluded to, I have shown something of the remarkable facility which is gained in dealing with the composition of three- and four-dimensional

rotations by an alteration in Hamilton's notation, which enables his system to be applied to both the A and B kinds of rotations.

The objection which has been often made to Hamilton's system, namely, that it is only under special conditions of application that his processes give geometrically interpretable results, can be removed, if we assume that he was really dealing with a four-dimensional motion, and alter his notation to bring this circumstance into explicit recognition.

APPENDIX I
THE MODELS

[Pg 231]

In Chapter XI. a description has been given which will enable any one to make a set of models illustrative of the tesseract and its properties. The set here supposed to be employed consists of:—

1. Three sets of twenty-seven cubes each.

2. Twenty-seven slabs.

3. Twelve cubes with points, lines, faces, distinguished by colours, which will be called the catalogue cubes.

The preparation of the twelve catalogue cubes involves the expenditure of a considerable amount of time. It is advantageous to use them, but they can be replaced by the drawing of the views of the tesseract or by a reference to figs. 103, 104, 105, 106 of the text.

The slabs are coloured like the twenty-seven cubes of the first cubic block in fig. 101, the one with red, white, yellow axes.

The colours of the three sets of twenty-seven cubes are those of the cubes shown in fig. 101.

The slabs are used to form the representation of a cube in a plane, and can well be dispensed with by any one who is accustomed to deal with solid figures. But the whole theory depends on a careful observation of how the cube would be represented by these slabs.

In the first step, that of forming a clear idea how a plane being would represent three-dimensional space, only one of the catalogue cubes and one of the three blocks is needed. [Pg 232]

Application to the Step from Plane to Solid.

Look at fig. 1 of the views of the tesseract, or, what comes to the same thing, take catalogue cube No. 1 and place it before you with the red line running up, the white line running to the right, the yellow line running away. The three dimensions of space are then marked out by these lines or axes. Now take a piece of cardboard, or a book, and place it so that it forms a wall extending up and down not opposite to you, but running away parallel to the wall of the room on your left hand.

Placing the catalogue cube against this wall we see that it comes into contact with it by the red and yellow lines, and by the included orange face.

In the plane being's world the aspect he has of the cube would be a square surrounded by red and yellow lines with grey points.

Now, keeping the red line fixed, turn the cube about it so that the yellow line goes out to the right, and the white line comes into contact with the plane.

In this case a different aspect is presented to the plane being, a square, namely, surrounded by red and white lines and grey points. You should particularly notice that when the yellow line goes out, at right angles to the plane, and the white comes in, the latter does not run in the same sense that the yellow did.

From the fixed grey point at the base of the red line the yellow line ran away from you. The white line now runs towards you. This turning at right angles makes the line which was out of the plane before, come into it in an opposite sense to that in which the line ran [Pg 233]

which has just left the plane. If the cube does not break through the plane this is always the rule.

Again turn the cube back to the normal position with red running up, white to the right, and yellow away, and try another turning.

You can keep the yellow line fixed, and turn the cube about it. In this case the red line going out to the right the white line will come in pointing downwards.

You will be obliged to elevate the cube from the table in order to carry out this turning. It is always necessary when a vertical axis goes out of a space to imagine a movable support which will allow the line which ran out before to come in below.

Having looked at the three ways of turning the cube so as to present different faces to the plane, examine what would be the appearance if a square hole were cut in the piece of cardboard, and the cube were to pass through it. A hole can be actually cut, and it will be seen that in the normal position, with red axis running up, yellow away, and white to the right, the square first perceived by the plane being—the one contained by red and yellow lines—would be replaced by another square of which the line towards you is pink—the section line of the pink face. The line above is light yellow, below is light yellow and on the opposite side away from you is pink.

In the same way the cube can be pushed through a square opening in the plane from any of the positions which you have already turned it into. In each case the plane being will perceive a different set of contour lines.

Having observed these facts about the catalogue cube, turn now to the first block of twenty-seven cubes.

You notice that the colour scheme on the catalogue cube and that of this set of blocks is the same.

Place them before you, a grey or null cube on the table, above it a red cube, and on the top a null cube again. Then away from you place a yellow cube, and beyond it a null cube. Then to the right place a white cube and beyond it another null. Then complete the block, according to the scheme of the catalogue cube, putting in the centre of all an ochre cube. [Pg 234]

You have now a cube like that which is described in the text. For the sake of simplicity, in some cases, this cubic block can be reduced to one of eight cubes, by leaving out the terminations in each direction. Thus, instead of null, red, null, three cubes, you can take null, red, two cubes, and so on.

It is useful, however, to practise the representation in a plane of a block of twenty-seven cubes. For this purpose take the slabs, and build them up against the piece of cardboard, or the book in such a way as to represent the different aspects of the cube.

Proceed as follows:—

First, cube in normal position.

Place nine slabs against the cardboard to represent the nine cubes in the wall of the red and yellow axes, facing the cardboard; these represent the aspect of the cube as it touches the plane.

Now push these along the cardboard and make a different set of nine slabs to represent the appearance which the cube would present to a plane being, if it were to pass half way through the plane.

There would be a white slab, above it a pink one, above that another white one, and six others, representing what would be the nature of a section across the middle of the block of cubes. The section can be thought of as a thin slice cut out by two parallel cuts across the cube. Having arranged these nine slabs, push them along the plane, and make another

set of nine to represent what would be the appearance of the cube when it had almost completely gone through. This set of nine will be the same as the first set of nine. [Pg 235]

Now we have in the plane three sets of nine slabs each, which represent three sections of the twenty-seven block.

They are put alongside one another. We see that it does not matter in what order the sets of nine are put. As the cube passes through the plane they represent appearances which follow the one after the other. If they were what they represented, they could not exist in the same plane together.

Este es un punto bastante importante, a saber, observar que no deben coexistir en el plano y que el orden en que se colocan es indiferente. Cuando representamos un cuerpo de cuatro dimensiones nuestros cubos sólidos están para nosotros en la misma posición que las losas están para el ser plano. También debes notar que cada una de estas losas representa solo la porción más delgada de un cubo. El conjunto de nueve losas colocadas primero representa la superficie lateral del bloque. Es, por así decirlo, una especie de bandeja, un comienzo del que parte el cubo sólido. Las losas tal como las utilizamos tienen espesor, pero este espesor es una necesidad de construcción. Deben considerarse simplemente como el grosor de una línea.

Si ahora el bloque de cubos pasara a través del plano a razón de una pulgada por minuto, la apariencia de un ser plano estaría representada por:

1. La primera serie de nueve losas con una duración de un minuto.

2. La segunda serie de nueve losas con una duración de un minuto.

3. La tercera serie de nueve losas con una duración de un minuto.

Ahora bien, a través de estas losas se pueden mostrar las apariencias que presentaría el cubo al plano estando en otras posiciones. El uso de tales losas sería el medio por el cual un ser plano podría adquirir una familiaridad con nuestro cubo. Gira el cubo del catálogo (o imagina la figura de color girada) de modo que la línea roja corra hacia arriba, la línea amarilla hacia la derecha y la línea blanca hacia ti. Luego gira el bloque de cubos para ocupar una posición similar. [Pág. 236]

El bloque tiene ahora una pared diferente en contacto con el avión. Su apariencia para un ser plano no será la misma que antes. Tiene, sin embargo, suficientes losas para representar este nuevo conjunto de apariencias. Pero debe remodelar su disposición anterior.

Debe tomar un bloque nulo, un rojo y un bloque nulo del primero de sus conjuntos de bloques, luego un blanco, un rosa y un blanco del segundo, y luego un bloque nulo, un rojo y un bloque nulo del tercero. conjunto de losas.

Toma la primera columna del primer conjunto, la primera columna del segundo conjunto y la primera columna del tercer conjunto.

Para representar la apariencia intermedia, que es como si se cortara una tajada muy delgada a la mitad del bloque, debe tomar la segunda columna de cada uno de sus conjuntos de losas, y para representar la apariencia final, la tercera. columna de cada conjunto.

Ahora vuelve a colocar el cubo del catálogo en su posición normal, y también el bloque de cubos.

Hay otro giro: un giro alrededor de la línea amarilla, en el que el eje blanco pasa por debajo del soporte.

No puedes atravesar la superficie de la mesa, por lo que debes imaginar que el viejo soporte se levanta. Entonces la parte superior del bloque de cubos en su nueva posición está al nivel en el que estaba antes la base del mismo.

Ahora representando la apariencia en el plano, debemos trazar una línea horizontal para representar la antigua base. La línea debe trazarse a tres pulgadas de alto en el cartón.

Debajo se pueden disponer las losas representativas.

Es fácil ver cuáles son. Los viejos arreglos Hay que dividirlos y tomar las capas en orden, la primera capa de cada una para la representación del aspecto del bloque cuando toca el plano. [Pág. 237]

Luego, las segundas capas representarán la apariencia a la mitad y las terceras capas representarán la apariencia final.

Es evidente que las losas individualmente no representan la misma porción del cubo en estas diferentes presentaciones.

En el primer caso cada losa representa una sección o una cara perpendicular al eje blanco, en el segundo caso una cara o una sección que discurre perpendicular al eje amarillo, y en el tercer caso una sección o una cara perpendicular al eje rojo .

Pero mediante estas nueve losas el ser plano puede representar la totalidad del bloque cúbico. Puede tocar y manipular cada porción del bloque cúbico; no hay parte que no pueda observar. Tomándolo poco a poco, de dos ejes a la vez, puede examinarlo en su conjunto.

Nuestra representación de un bloque de Teseractos.

Mire las vistas del teseracto 1, 2, 3, o tome los cubos del catálogo 1, 2, 3 y colóquelos frente a usted, en cualquier orden, digamos de izquierda a derecha, colocando 1 en la posición normal, el eje rojo corre hacia arriba, el blanco hacia la derecha y el amarillo hacia afuera.

Ahora observe que en el cubo de catálogo 2 los colores de cada región se derivan de los de la región correspondiente del cubo 1 mediante la adición de azul. Por tanto, nulo + azul = azul, y las esquinas del número 2 son azules. Nuevamente, rojo + azul = morado, y las líneas verticales de 2 son moradas. Azul + amarillo = verde, y la línea que se aleja es de color verde.

Por medio de estas observaciones usted puede estar seguro de que El cubo de catálogo 2 está colocado correctamente. El cubo 3 del catálogo es igual que el número 1. [Pág. 238]

Teniendo estos cubos en lo que podríamos llamar su posición normal, procedemos a construir los tres conjuntos de bloques.

Esto se puede hacer fácilmente siguiendo la combinación de colores de los cubos del catálogo.

El primer bloque ya lo conocemos. Construye el segundo bloque, comenzando con un cubo de esquina azul, colocándole uno morado, y así sucesivamente.

Teniendo estos tres bloques tenemos los medios para representar las apariciones de un grupo de ochenta y un teseractos.

Consideremos por un momento cuál es la analogía en el caso del ser plano.

Tiene sus tres juegos de nueve losas cada uno. Tenemos nuestros tres conjuntos de veintisiete cubos cada uno.

Nuestros cubos son como sus losas. Así como sus losas no son las cosas que representan para él, nuestros cubos no son las cosas que representan para nosotros.

Las losas del ser plano son para él las caras de los cubos.

Nuestros cubos son entonces las caras de los teseractos, los cubos por los que están en contacto con nuestro espacio.

Así como cada conjunto de losas en el caso del ser plano podría considerarse como una especie de bandeja de la cual sale el contenido sólido de los cubos, nuestros tres bloques de cubos pueden considerarse como bandejas de tres espacios, cada uno de los cuales es el comienzo de una pulgada del contenido sólido de los sólidos de cuatro dimensiones a partir de ellos.

Ahora queremos usar los nombres nulo, rojo, blanco, etc., para los teseractos. Los cubos que utilizamos son sólo caras de tesseract. Denotemos ese hecho llamando al cubo de color nulo cara nula; o, en breve, f. nula, lo que significa que es la cara de un teseracto.

Para determinar de qué cara se trata fijémonos en el cubo de catálogo 1 o en la primera de las vistas del teseracto, que Se puede utilizar en lugar de los modelos. Tiene tres ejes, rojo, blanco, amarillo, en nuestro espacio. De ahí que el cubo determinado por estos ejes sea la cara del teseracto que ahora tenemos ante nosotros. Es la cara ocre. Sin embargo, basta con decir f. nula, f. roja. para los cubos que usamos. [Pág. 239]

Para grabar esto en tu mente, imagina que los teseractos realmente salen de cada cubo. Luego, cuando mueves los cubos, mueves los teseractos con ellos. Mueves la cara pero el teseracto la sigue, como el cubo la sigue cuando su cara se desplaza en un plano.

El cubo nulo en la posición normal es el cubo que tiene en él los ejes rojo, amarillo y blanco. Es la cara que tiene esto, pero quiere el azul. De esta forma podrás definir qué cara es la que estás manejando. Escribiré una "f". después del nombre de cada teseracto así como el ser plano podría llamar a cada una de sus losas, losa nula, losa amarilla, etc., para denotar que eran representaciones.

Tenemos entonces, en el primer bloque de veintisiete cubos, lo siguiente: f. nula, f. roja, f. nula, subiendo; f. blanca, f. nula, acostada a la derecha, etc. Comenzando desde el punto nulo y subiendo una pulgada estamos en la región nula, lo mismo para las direcciones de alejamiento y de derecha. Y si viajáramos en la cuarta dimensión una pulgada, todavía estaríamos en una región nula. El teseracto se extiende por igual en los cuatro sentidos. Por lo tanto, la apariencia que tenemos en este primer bloque funcionaría igualmente bien si el bloque teseracto se moviera a través de nuestro espacio una cierta distancia. Para cualquier cosa que sea menos de una pulgada de su movimiento transversal, deberíamos tener la misma apariencia. Debe observarse, sin embargo, que no deberíamos tener cara nula una vez iniciada la moción.

Cuando el teseracto, nulo por ejemplo, se hubiera movido muy poco, no deberíamos tener una cara de nulo sino una sección de nulo en nuestro espacio. Por lo tanto, cuando pensamos en el movimiento a lo largo de nuestro espacio debemos llamar a nuestros cubos secciones teseracto. Por lo tanto, al cruzar null deberíamos ver primero null f., luego null s. y luego, finalmente, null f. de nuevo. [Pág. 240]

Imaginemos ahora que todo el primer bloque de veintisiete teseractos se hubiera movido transversalmente a nuestro espacio una distancia de una pulgada. Entonces el segundo conjunto de teseractos, que originalmente estaban a una pulgada de distancia de nuestro espacio, estaría listo para entrar.

Their colours are shown in the second block of twenty-seven cubes which you have before you. These represent the tesseract faces of the set of tesseracts that lay before an inch away from our space. They are ready now to come in, and we can observe their colours. In the place which null f. occupied before we have blue f., in place of red f. we have purple f., and so on. Each tesseract is coloured like the one whose place it takes in this motion with the addition of blue.

Now if the tesseract block goes on moving at the rate of an inch a minute, this next set of tesseracts will occupy a minute in passing across. We shall see, to take the null one for

instance, first of all null face, then null section, then null face again.

At the end of the second minute the second set of tesseracts has gone through, and the third set comes in. This, as you see, is coloured just like the first. Altogether, these three sets extend three inches in the fourth dimension, making the tesseract block of equal magnitude in all dimensions.

We have now before us a complete catalogue of all the tesseracts in our group. We have seen them all, and we shall refer to this arrangement of the blocks as the "normal position." We have seen as much of each tesseract at a time as could be done in a three-dimensional space. Each part of each tesseract has been in our space, and we could have touched it.

The fourth dimension appeared to us as the duration of the block. [Pg 241]

If a bit of our matter were to be subjected to the same motion it would be instantly removed out of our space. Being thin in the fourth dimension it is at once taken out of our space by a motion in the fourth dimension.

But the tesseract block we represent having length in the fourth dimension remains steadily before our eyes for three minutes, when it is subjected to this transverse motion.

We have now to form representations of the other views of the same tesseract group which are possible in our space.

Let us then turn the block of tesseracts so that another face of it comes into contact with our space, and then by observing what we have, and what changes come when the block traverses our space, we shall have another view of it. The dimension which appeared as duration before will become extension in one of our known dimensions, and a dimension which coincided with one of our space dimensions will appear as duration.

Leaving catalogue cube 1 in the normal position, remove the other two, or suppose them removed. We have in space the red, the yellow, and the white axes. Let the white axis go out into the unknown, and occupy the position the blue axis holds. Then the blue axis, which runs in that direction now will come into space. But it will not come in pointing in the same way that the white axis does now. It will point in the opposite sense. It will come in running to the left instead of running to the right as the white axis does now.

When this turning takes place every part of the cube 1 will disappear except the left-hand face—the orange face.

And the new cube that appears in our space will run to the left from this orange face, having axes, red, yellow, blue.

Take models 4, 5, 6. Place 4, or suppose No. 4 of the tesseract views placed, with its orange face coincident with the orange face of 1, red line to red line, and yellow line to yellow line, with the blue line pointing to the left. Then remove cube 1 and we have the tesseract face which comes in when the white axis runs in the positive unknown, and the blue axis comes into our space. [Pg 242]

Now place catalogue cube 5 in some position, it does not matter which, say to the left; and place it so that there is a correspondence of colour corresponding to the colour of the line that runs out of space. The line that runs out of space is white, hence, every part of this cube 5 should differ from the corresponding part of 4 by an alteration in the direction of white.

Thus we have white points in 5 corresponding to the null points in 4. We have a pink line corresponding to a red line, a light yellow line corresponding to a yellow line, an ochre face corresponding to an orange face. This cube section is completely named in Chapter XI. Finally cube 6 is a replica of 1.

These catalogue cubes will enable us to set up our models of the block of tesseracts.

First of all for the set of tesseracts, which beginning in our space reach out one inch in the unknown, we have the pattern of catalogue cube 4.

We see that we can build up a block of twenty-seven tesseract faces after the colour scheme of cube 4, by taking the left-hand wall of block 1, then the left-hand wall of block 2, and finally that of block 3. We take, that is, the three first walls of our previous arrangement to form the first cubic block of this new one.

This will represent the cubic faces by which the group of tesseracts in its new position touches our space. We have running up, null f., red f., null f. In the next vertical line, on the side remote from us, we have yellow f., orange f., yellow f., and then the first colours over again. Then the three following columns are, blue f., purple f., blue f.; green f., brown f., green f.; blue f., purple f., blue f. The last three columns are like the first. [Pg 243]

These tesseracts touch our space, and none of them are by any part of them distant more than an inch from it. What lies beyond them in the unknown?

This can be told by looking at catalogue cube 5. According to its scheme of colour we see that the second wall of each of our old arrangements must be taken. Putting them together we have, as the corner, white f. above it, pink f. above it, white f. The column next to this remote from us is as follows:—light yellow f., ochre f., light yellow f., and beyond this a column like the first. Then for the middle of the block, light blue f., above it light purple, then light blue. The centre column has, at the bottom, light green f., light brown f. in the centre and at the top light green f. The last wall is like the first.

The third block is made by taking the third walls of our previous arrangement, which we called the normal one.

You may ask what faces and what sections our cubes represent. To answer this question look at what axes you have in our space. You have red, yellow, blue. Now these determine brown. The colours red, yellow, blue are supposed by us when mixed to produce a brown colour. And that cube which is determined by the red, yellow, blue axes we call the brown cube.

When the tesseract block in its new position begins to move across our space each tesseract in it gives a section in our space. This section is transverse to the white axis, which now runs in the unknown.

As the tesseract in its present position passes across our space, we should see first of all the first of the blocks of cubic faces we have put up—these would last for a minute, then would come the second block and then the third. At first we should have a cube of tesseract faces, each of which would be brown. Directly the movement began, we should have tesseract sections transverse to the white line. [Pg 244]

There are two more analogous positions in which the block of tesseracts can be placed. To find the third position, restore the blocks to the normal arrangement.

Let us make the yellow axis go out into the positive unknown, and let the blue axis, consequently, come in running towards us. The yellow ran away, so the blue will come in running towards us.

Put catalogue cube 1 in its normal position. Take catalogue cube 7 and place it so that its pink face coincides with the pink face of cube 1, making also its red axis coincide with the red axis of 1 and its white with the white. Moreover, make cube 7 come towards us from cube 1. Looking at it we see in our space, red, white, and blue axes. The yellow runs out. Place catalogue cube 8 in the neighbourhood of 7—observe that every region in 8 has a change in the direction of yellow from the corresponding region in 7. This is because it represents what you come to now in going in the unknown, when the yellow axis runs out of our space. Finally catalogue cube 9, which is like number 7, shows the colours of the third set of tesseracts. Now evidently, starting from the normal position, to

make up our three blocks of tesseract faces we have to take the near wall from the first block, the near wall from the second, and then the near wall from the third block. This gives us the cubic block formed by the faces of the twenty-seven tesseracts which are now immediately touching our space.

Following the colour scheme of catalogue cube 8, we make the next set of twenty-seven tesseract faces, representing the tesseracts, each of which begins one inch off from our space, by putting the second walls of our previous arrangement together, and the representation of the third set of tesseracts is the cubic block formed of the remaining three walls. [Pg 245]

Since we have red, white, blue axes in our space to begin with, the cubes we see at first are light purple tesseract faces, and after the transverse motion begins we have cubic sections transverse to the yellow line.

Restore the blocks to the normal position, there remains the case in which the red axis turns out of space. In this case the blue axis will come in downwards, opposite to the sense in which the red axis ran.

In this case take catalogue cubes 10, 11, 12. Lift up catalogue cube 1 and put 10 underneath it, imagining that it goes down from the previous position of 1.

We have to keep in space the white and the yellow axes, and let the red go out, the blue come in.

Now, you will find on cube 10 a light yellow face; this should coincide with the base of 1, and the white and yellow lines on the two cubes should coincide. Then the blue axis running down you have the catalogue cube correctly placed, and it forms a guide for putting up the first representative block.

Catalogue cube 11 will represent what lies in the fourth dimension—now the red line runs in the fourth dimension. Thus the change from 10 to 11 should be towards red, corresponding to a null point is a red point, to a white line is a pink line, to a yellow line an orange line, and so on.

Catalogue cube 12 is like 10. Hence we see that to build up our blocks of tesseract faces we must take the bottom layer of the first block, hold that up in the air, underneath it place the bottom layer of the second block, and finally underneath this last the bottom layer of the last of our normal blocks. [Pg 246]

Similarly we make the second representative group by taking the middle courses of our three blocks. The last is made by taking the three topmost layers. The three axes in our space before the transverse motion begins are blue, white, yellow, so we have light green tesseract faces, and after the motion begins sections transverse to the red light.

These three blocks represent the appearances as the tesseract group in its new position passes across our space. The cubes of contact in this case are those determinal by the three axes in our space, namely, the white, the yellow, the blue. Hence they are light green.

It follows from this that light green is the interior cube of the first block of representative cubic faces.

Practice in the manipulations described, with a realization in each case of the face or section which is in our space, is one of the best means of a thorough comprehension of the subject.

We have to learn how to get any part of these four-dimensional figures into space, so that we can look at them. We must first learn to swing a tesseract, and a group of tesseracts about in any way.

When these operations have been repeated and the method of arrangement of the set of blocks has become familiar, it is a good plan to rotate the axes of the normal cube 1 about a diagonal, and then repeat the whole series of turnings.

Thus, in the normal position, red goes up, white to the right, yellow away. Make white go up, yellow to the right, and red away. Learn the cube in this position by putting up the set of blocks of the normal cube, over and over again till it becomes as familiar to you as in the normal position. Then when this is learned, and the corresponding changes in the arrangements of the tesseract groups are made, another change should be made: let, in the normal cube, yellow go up, red to the right, and white away. [Pg 247]

Learn the normal block of cubes in this new position by arranging them and re-arranging them till you know without thought where each one goes. Then carry out all the tesseract arrangements and turnings.

If you want to understand the subject, but do not see your way clearly, if it does not seem natural and easy to you, practise these turnings. Practise, first of all, the turning of a block of cubes round, so that you know it in every position as well as in the normal one. Practise by gradually putting up the set of cubes in their new arrangements. Then put up the tesseract blocks in their arrangements. This will give you a working conception of higher space, you will gain the feeling of it, whether you take up the mathematical treatment of it or not.

APPENDIX II

A LANGUAGE OF SPACE

[Pg 248]

The mere naming the parts of the figures we consider involves a certain amount of time and attention. This time and attention leads to no result, for with each new figure the nomenclature applied is completely changed, every letter or symbol is used in a different significance.

Surely it must be possible in some way to utilise the labour thus at present wasted!

Why should we not make a language for space itself, so that every position we want to refer to would have its own name? Then every time we named a figure in order to demonstrate its properties we should be exercising ourselves in the vocabulary of place.

If we use a definite system of names, and always refer to the same space position by the same name, we create as it were a multitude of little hands, each prepared to grasp a special point, position, or element, and hold it for us in its proper relations.

We make, to use another analogy, a kind of mental paper, which has somewhat of the properties of a sensitive plate, in that it will register, without effort, complex, visual, or tactual impressions.

But of far more importance than the applications of a space language to the plane and to solid space is the facilitation it brings with it to the study of four-dimensional shapes. [Pg 249]

I have delayed introducing a space language because all the systems I made turned out, after giving them a fair trial, to be intolerable. I have now come upon one which seems to present features of permanence, and I will here give an outline of it, so that it can be applied to the subject of the text, and in order that it may be subjected to criticism.

The principle on which the language is constructed is to sacrifice every other consideration for brevity.

It is indeed curious that we are able to talk and converse on every subject of thought except the fundamental one of space. The only way of speaking about the spatial configurations that underlie every subject of discursive thought is a co-ordinate system of numbers. This is so awkward and incommodious that it is never used. In thinking also, in realising shapes, we do not use it; we confine ourselves to a direct visualisation.

Now, the use of words corresponds to the storing up of our experience in a definite brain structure. A child, in the endless tactual, visual, mental manipulations it makes for itself, is best left to itself, but in the course of instruction the introduction of space names would make the teachers work more cumulative, and the child's knowledge more social.

Their full use can only be appreciated, if they are introduced early in the course of education; but in a minor degree any one can convince himself of their utility, especially in our immediate subject of handling four-dimensional shapes. The sum total of the results obtained in the preceding pages can be compendiously and accurately expressed in nine words of the Space Language.

In one of Plato's dialogues Socrates makes an experiment on a slave boy standing by. He makes certain perceptions of space awake in the mind of Meno's slave by directing his close attention on some simple facts of geometry. [Pg 250]

By means of a few words and some simple forms we can repeat Plato's experiment on new ground.

Do we by directing our close attention on the facts of four dimensions awaken a latent faculty in ourselves? The old experiment of Plato's, it seems to me, has come down to us

as novel as on the day he incepted it, and its significance not better understood through all the discussion of which it has been the subject.

Imagine a voiceless people living in a region where everything had a velvety surface, and who were thus deprived of all opportunity of experiencing what sound is. They could observe the slow pulsations of the air caused by their movements, and arguing from analogy, they would no doubt infer that more rapid vibrations were possible. From the theoretical side they could determine all about these more rapid vibrations. They merely differ, they would say, from slower ones, by the number that occur in a given time; there is a merely formal difference.

But suppose they were to take the trouble, go to the pains of producing these more rapid vibrations, then a totally new sensation would fall on their rudimentary ears. Probably at first they would only be dimly conscious of Sound, but even from the first they would become aware that a merely formal difference, a mere difference in point of number in this particular respect, made a great difference practically, as related to them. And to us the difference between three and four dimensions is merely formal, numerical. We can tell formally all about four dimensions, calculate the relations that would exist. But that the difference is merely formal does not prove that it is a futile and empty task, to present to ourselves as closely as we can the phenomena of four dimensions. In our formal knowledge of it, the whole question of its actual relation to us, as we are, is left in abeyance. [Pg 251]

Possibly a new apprehension of nature may come to us through the practical, as distinguished from the mathematical and formal, study of four dimensions. As a child handles and examines the objects with which he comes in contact, so we can mentally handle and examine four-dimensional objects. The point to be determined is this. Do we find something cognate and natural to our faculties, or are we merely building up an artificial presentation of a scheme only formally possible, conceivable, but which has no real connection with any existing or possible experience?

This, it seems to me, is a question which can only be settled by actually trying. This practical attempt is the logical and direct continuation of the experiment Plato devised in the “Meno.”

Why do we think true? Why, by our processes of thought, can we predict what will happen, and correctly conjecture the constitution of the things around us? This is a problem which every modern philosopher has considered, and of which Descartes, Leibnitz, Kant, to name a few, have given memorable solutions. Plato was the first to suggest it. And as he had the unique position of being the first devisor of the problem, so his solution is the most unique. Later philosophers have talked about consciousness and its laws, sensations, categories. But Plato never used such words. Consciousness apart from a conscious being meant nothing to him. His was always an objective search. He made man’s intuitions the basis of a new kind of natural history.

In a few simple words Plato puts us in an attitude with regard to psychic phenomena—the mind—the ego—“what we are,” which is analogous to the attitude scientific men of the present day have with regard to the phenomena of outward nature. Behind this first apprehension of ours of nature, there is an infinite depth to be learned and known. Plato said that behind the phenomena of mind that Meno’s slave boy exhibited, there was a vast, an infinite perspective. And his singularity, his originality, comes out most strongly marked in this, that the perspective, the complex phenomena beyond were, according to him, phenomena of personal experience. A footprint in the sand means a man to a being that has the conception of a man. But to a creature that has no such conception, it means a curious mark, somehow resulting from the concatenation of ordinary occurrences. Such a being would attempt merely to explain how causes known to him could so coincide as to produce such a result; he would not recognise its significance. [Pg 252]

Plato introduced the conception which made a new kind of natural history possible. He said that Meno’s slave boy thought true about things he had never learned, because his

"soul" had experience. I know this will sound absurd to some people, and it flies straight in the face of the maxim, that explanation consists in showing how an effect depends on simple causes. But what a mistaken maxim that is! Can any single instance be shown of a simple cause? Take the behaviour of spheres for instance; say those ivory spheres, billiard balls, for example. We can explain their behaviour by supposing they are homogeneous elastic solids. We can give formulæ which will account for their movements in every variety. But are they homogeneous elastic solids? No, certainly not. They are complex in physical and molecular structure, and atoms and ions beyond open an endless vista. Our simple explanation is false, false as it can be. The balls act as if they were homogeneous elastic spheres. There is a statistical simplicity in the resultant of very complex conditions, which makes that artificial conception useful. But its usefulness must not blind us to the fact that it is artificial. If we really look deep into nature, we find a much greater complexity than we at first suspect. And so behind this simple "I," this myself, is there not a parallel complexity? Plato's "soul" would be quite acceptable to a large class of thinkers, if by "soul" and the complexity he attributes to it, he meant the product of a long course of evolutionary changes, whereby simple forms of living matter endowed with rudimentary sensation had gradually developed into fully conscious beings.

[Pg 253]

But Plato does not mean by "soul" a being of such a kind. His soul is a being whose faculties are clogged by its bodily environment, or at least hampered by the difficulty of directing its bodily frame—a being which is essentially higher than the account it gives of itself through its organs. At the same time Plato's soul is not incorporeal. It is a real being with a real experience. The question of whether Plato had the conception of non-spatial existence has been much discussed. The verdict is, I believe, that even his "ideas" were conceived by him as beings in space, or, as we should say, real. Plato's attitude is that of Science, inasmuch as he thinks of a world in Space. But, granting this, it cannot be denied that there is a fundamental divergence between Plato's conception and the evolutionary theory, and also an absolute divergence between his conception and the genetic account of the origin of the human faculties. The functions and capacities of Plato's "soul" are not derived by the interaction of the body and its environment.

Plato was engaged on a variety of problems, and his religious and ethical thoughts were so keen and fertile that the experimental investigation of his soul appears involved with many other motives. In one passage Plato will combine matter of thought of all kinds and from all sources, overlapping, interrunning. And in no case is he more involved and rich than in this question of the soul. In fact, I wish there were two words, one denoting that being, corporeal and real, but with higher faculties than we manifest in our bodily actions, which is to be taken as the subject of experimental investigation; and the other word denoting "soul" in the sense in which it is made the recipient and the promise of so much that men desire. It is the soul in the former sense that I wish to investigate, and in a limited sphere only. I wish to find out, in continuation of the experiment in the Meno, what the "soul" in us thinks about extension, experimenting on the grounds laid down by Plato. He made, to state the matter briefly, the hypothesis with regard to the thinking power of a being in us, a "soul." This soul is not accessible to observation by sight or touch, but it can be observed by its functions; it is the object of a new kind of natural history, the materials for constructing which lie in what it is natural to us to think. With Plato "thought" was a very wide-reaching term, but still I would claim in his general plan of procedure a place for the particular question of extension.

[Pg 254]

The problem comes to be, "What is it natural to us to think about matter *qua* extended?"

First of all, I find that the ordinary intuition of any simple object is extremely imperfect. Take a block of differently marked cubes, for instance, and become acquainted with them in their positions. You may think you know them quite well, but when you turn them round—rotate the block round a diagonal, for instance—you will find that you have lost track of the individuals in their new positions. You can mentally construct the block in its new position, by a rule, by taking the remembered sequences, but you don't know it

intuitively. By observation of a block of cubes in various positions, and very expeditiously by a use of Space names applied to the cubes in their different presentations, it is possible to get an intuitive knowledge of the block of cubes, which is not disturbed by any displacement. Now, with regard to this intuition, we moderns would say that I had formed it by my tactual visual experiences (aided by hereditary predisposition). Plato would say that the soul had been stimulated to recognise an instance of shape which it knew. Plato would consider the operation of learning merely as a stimulus; we as completely accounting for the result. The latter is the more common-sense view. But, on the other hand, it presupposes the generation of experience from physical changes. The world of sentient experience, according to the modern view, is closed and limited; only the physical world is ample and large and of ever-to-be-discovered complexity. Plato's world of soul, on the other hand, is at least as large and ample as the world of things. [Pg 255]

Probemos ahora un experimento crucial. ¿Puedo formarme una intuición de un objeto de cuatro dimensiones? Un objeto así no está dentro del alcance físico de mis contactos sensoriales. Lo único que puedo hacer es presentarme las secuencias de sólidos, lo que significaría para mí la presentación bajo mis condiciones de un objeto de cuatro dimensiones. Todo lo que puedo hacer es visualizar y tactilizar diferentes series de sólidos que son conjuntos alternativos de vistas en sección de una forma de cuatro dimensiones.

Si ahora, al presentar estas secuencias, encuentro en mí el poder de pasar intuitivamente de uno de estos conjuntos de secuencias a otro, de, dándome una, construir intuitivamente otra, sin usar una regla, sino aprehenderla directamente, entonces tengo encontré un nuevo hecho acerca de mi alma, que tiene una experiencia de cuatro dimensiones; Lo he observado por una función que tiene.

No me gusta hablar positivamente porque podría ocasionar una pérdida de tiempo a otros si, como muy bien puede suceder, ser, me equivoco. Pero, por mi parte, creo que hay indicios de tal intuición; de los resultados de mis experimentos, adopto la hipótesis de que aquello que piensa en nosotros tiene una amplia experiencia, de la cual forman parte las intuiciones que utilizamos al tratar con el mundo de los objetos reales; de la cual también forma parte la experiencia, la intuición de formas y movimientos cuatridimensionales. El proceso en el que estamos involucrados intelectualmente es leer las oscuras señales de nuestros nervios en un mundo de realidad, por medio de intuiciones derivadas de la experiencia interna. [Pág. 256]

La imagen que formo es la siguiente. Imaginemos al capitán de un acorazado moderno dirigiendo su rumbo. Tiene sus cartas ante él; está en comunicación con sus asociados y subordinados; puede transmitir sus mensajes y órdenes a cada parte del barco y recibir información de la torre de mando y de la sala de máquinas. Supongamos ahora que el capitán, inmerso en el problema de la navegación de su barco sobre el océano, se ha absorto tanto en el problema de la dirección de su embarcación sobre la superficie plana del mar que se olvida de sí mismo. Lo único que ocupa su atención es el tipo de movimiento que hace su barco. Las operaciones mediante las cuales se produce ese movimiento han caído por debajo del umbral de su conciencia, sus propias acciones, mediante las cuales aprieta los botones, da las órdenes, son tan familiares que son automáticas, su mente está en el movimiento del barco como tal. entero. En tal caso podemos imaginar que se identifica con su barco; todo lo que entra en su pensamiento consciente es la dirección de su movimiento sobre la superficie plana del océano.

Tal es la relación, tal como la imagino, del alma con el cuerpo. Una relación que podemos imaginar que existe momentáneamente en el caso del capitán es la normal en el caso del alma con su nave. Como el capitán es capaz de un tipo de movimiento, una amplitud de movimiento, que no entra en sus pensamientos con respecto al Dirigir el barco sobre la superficie plana del océano, por lo que el alma es capaz de un tipo de movimiento, tiene una amplitud de movimiento, que no se utiliza en su tarea de dirigir el cuerpo en la región tridimensional en la que se desarrolla la actividad del cuerpo. [Pág. 257]

mentiras. Si por alguna razón fuera necesario que el capitán considerara movimientos tridimensionales con respecto a su barco, no le sería difícil obtener los materiales para pensar en tales movimientos; todo lo que tiene que hacer es poner en juego su propia experiencia íntima. Sin embargo, en lo que respecta a la navegación del barco, no está obligado a recurrir a dicha experiencia. El barco en su conjunto simplemente se mueve sobre la superficie. El problema del movimiento tridimensional normalmente no concierne a su dirección. Y así, con respecto a nosotros mismos, todos esos movimientos y actividades que caracterizan a nuestros órganos corporales son tridimensionales; Nunca necesitamos considerar los movimientos más amplios. Pero hacemos más que utilizar los movimientos de nuestro cuerpo para lograr nuestros objetivos por medios directos; Ahora hemos llegado al punto en el que actuamos indirectamente sobre la naturaleza, en el que ponemos en juego procesos que están más allá del alcance de cualquier explicación que podamos dar mediante el tipo de pensamiento que ha sido suficiente para dirigir nuestro arte en su conjunto. Cuando abordamos el problema de lo que sucede en el minuto y nos aplicamos al mecanismo del minuto, encontramos que nuestras concepciones habituales son inadecuadas.

El capitán que hay en nosotros debe despertar a su propia naturaleza íntima, darse cuenta de las funciones del movimiento que le son propias y, en virtud de su conocimiento de ellas, comprender cómo abordar los problemas a los que se ha enfrentado.

Pensemos en la historia del hombre. ¿Cuándo ha habido un tiempo en el que sus pensamientos sobre la forma y el movimiento no fueran exclusivamente de variedades adaptadas a su desempeño corporal? Nunca hemos tenido la exigencia de concebir cuáles son nuestros poderes más íntimos. Pero, Así como el capitán, al sumergirse en el [Pág. 258] gobierno de su barco sobre la superficie plana del océano, no puede perder la facultad de pensar en lo que realmente hace, el alma tampoco puede perder su propia naturaleza. Puede despertarse a una intuición que no se deriva de la experiencia que brindan los sentidos. Todo lo que es necesario es presentar algunas de esas apariencias que, si bien son inconsistentes con la materia tridimensional, son consistentes con nuestro conocimiento formal de la materia cuatridimensional, para que el alma despierte y no comience a aprender, sino que de su propio sentimiento íntimo llena los vacíos del presentimiento, capta el orbe completo de posibilidades a partir de los puntos aislados que se le presentan. En relación con esta cuestión de nuestras percepciones, permítanme sugerir otro ejemplo, sin tomarlo demasiado en serio, proponiéndolo únicamente para mostrar las posibilidades de una manera amplia y general.

En el cielo, entre la multitud de estrellas, hay algunas que, cuando se miran con el telescopio, no parecen estrellas individuales, sino divididas en dos. Al observar estas estrellas gemelas a través de un espectroscopio, un astrónomo ve en cada una un espectro de bandas de color y líneas negras. Comparando estos espectros entre sí, descubre que hay un ligero desplazamiento relativo de las líneas oscuras y, a partir de ese desplazamiento, sabe que las estrellas giran unas alrededor de otras y puede determinar su velocidad relativa con respecto a la Tierra. Por medio de su física terrestre lee esta señal de los cielos. Este desplazamiento de líneas, la mera variación leve de una línea negra en un espectro, es muy diferente de lo que el astrónomo sabe que significa. Pero probablemente se parezca mucho más a lo que significa que las señales que envían los nervios a los fenómenos del mundo exterior.

Los nervios no transmiten ninguna imagen de un objeto. Ninguna imagen del movimiento, en el sentido en que postulamos su existencia, se transmite a través de los nervios. El actual Las liberaciones que nuestra conciencia tiene en cuenta son [Pág. 259] probablemente idénticas para el ojo y el oído, la vista y el tacto.

Si por un momento tomo a toda la Tierra y la considero como un ser sintiente, encuentro que el problema de su aprehensión es muy complejo e implica una larga serie de acontecimientos personales y físicos. De manera similar, el problema de nuestra aprehensión es muy complejo. Sólo uso esta ilustración para exhibir mi significado. Tiene

este mérito especial que, así como el proceso de aprehensión consciente tiene lugar en nuestro caso en un minuto, así, con respecto a este ser terrestre, el proceso correspondiente tiene lugar en lo que para él es muy diminuto.

Ahora bien, la visión platónica del alma nos lleva a la hipótesis de que aquello que designamos como acto de aprehensión puede ser un acontecimiento muy complejo, tanto física como personalmente. No busca explicar qué es una intuición; lo convierte en la base desde la que emprende un viaje de descubrimiento. Conocimiento significa conocimiento; él hace que el ser consciente rinda cuentas del ser consciente. Plantea una hipótesis del tipo que es tan fértil en la ciencia física: una hipótesis que no pretende ser definitiva, que señala una perspectiva de posible determinación detrás de la determinación, como la hipótesis del espacio mismo, el tipo de hipótesis útiles.

Y, sobre todo, la hipótesis de Platón favorece la experimentación. Da la perspectiva en la que se pueden determinar los objetos reales; y, en nuestra investigación actual, estamos haciendo el más simple de todos los experimentos posibles: estamos investigando qué es natural para el alma pensar que la materia es extensa.

Aristóteles dice que siempre utilizamos un “fantasma” en el pensamiento, un fantasma de nuestros sentidos corporales, una visualización o una tactilización. Pero podemos modificar esa visualización o táctilización de tal manera que represente algo no conocido por los sentidos. ¿Despertamos mediante esa representación un ¿Intuición del alma? ¿Podemos mediante la presentación de estas formas hipotéticas, que son el tema de nuestra presente discusión, despertarnos a intuiciones superiores? ¿Y podemos explicar el mundo que nos rodea mediante un movimiento que sólo conocemos por nuestra alma? [Pág. 260]

Sin embargo, aparte de toda especulación, me parece que el interés de estas formas y movimientos cuatridimensionales es razón suficiente para estudiarlos, y que son el camino por el cual podemos crecer hacia una comprensión más plena del mundo como algo concreto. entero.

NOMBRES DE ESPACIOS.

Si las palabras escritas en los cuadrados dibujados en la fig. 1 se utilizan como nombres de los cuadrados en las posiciones en las que se colocan, es evidente que una combinación de estos nombres denotará una figura compuesta por los cuadrados designados. Se considera más conveniente tomar como inicial el cuadrado marcado con un asterisco, de manera que los sentidos de progresión sean hacia el observador y hacia su derecha. Las direcciones de progresión, sin embargo, son arbitrarias y pueden elegirse a voluntad.

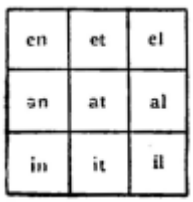


Figura 1.

Así *et* , *at* , *it* , *an* , *al* denotará una figura en forma de cruz compuesta por cinco cuadrados.

Aquí, mediante la doble secuencia, *e* , *a* , *i* y *n* , *t* , *l* , es posible nombrar una colección limitada de elementos espaciales.

Obviamente, el sistema se puede ampliar utilizando secuencias de letras de más miembros.

Pero, sin introducir tal complejidad, se pueden exponer los principios de un lenguaje espacial y obtener una nomenclatura adecuada a todas las consideraciones de las páginas anteriores.

1. *Ampliación.* [Pág. 261]

Llama a los cuadrados grandes en 2 por el nombre escrito en ellos. Es evidente que cada uno se puede dividir como se muestra en la fig. 1 . Entonces el pequeño cuadrado marcado con 1 será "en" en "En" o "Enen". El cuadrado marcado con 2 será "et" en "En" o "Enet", mientras que el cuadrado marcado con 4 será "en" en "Et" o "Eten". Por lo tanto, el cuadrado 5 se llamará "Ilil".

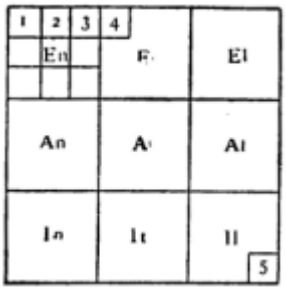


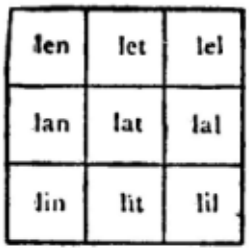
Figura 2.

Este principio de extensión se puede aplicar en cualquier número de dimensiones.

2. *Aplicación al Espacio Tridimensional.*

Para nombrar una colocación tridimensional de cubos, tome primero la dirección hacia arriba, en segundo lugar la dirección hacia el observador y en tercer lugar la dirección hacia su mano derecha.

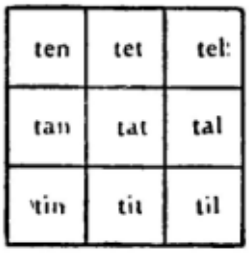
Éstos forman una palabra en la que la primera letra indica el lugar del cubo hacia arriba, la segunda letra su lugar hacia el observador, la tercera letra su lugar hacia la derecha.



Tenemos así el siguiente esquema, que representa el conjunto de cubos de la columna 1, fig. 101 , página 165.

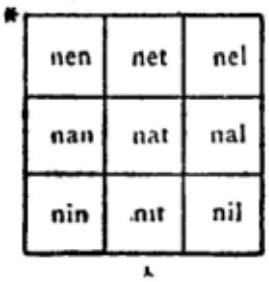
We begin with the remote lowest cube at the left hand, where the asterisk is placed (this proves to be by far the most convenient origin to take for the normal system).

Thus “nen” is a “null” cube, “ten” a red cube on it, and “len” a “null” cube above “ten.”

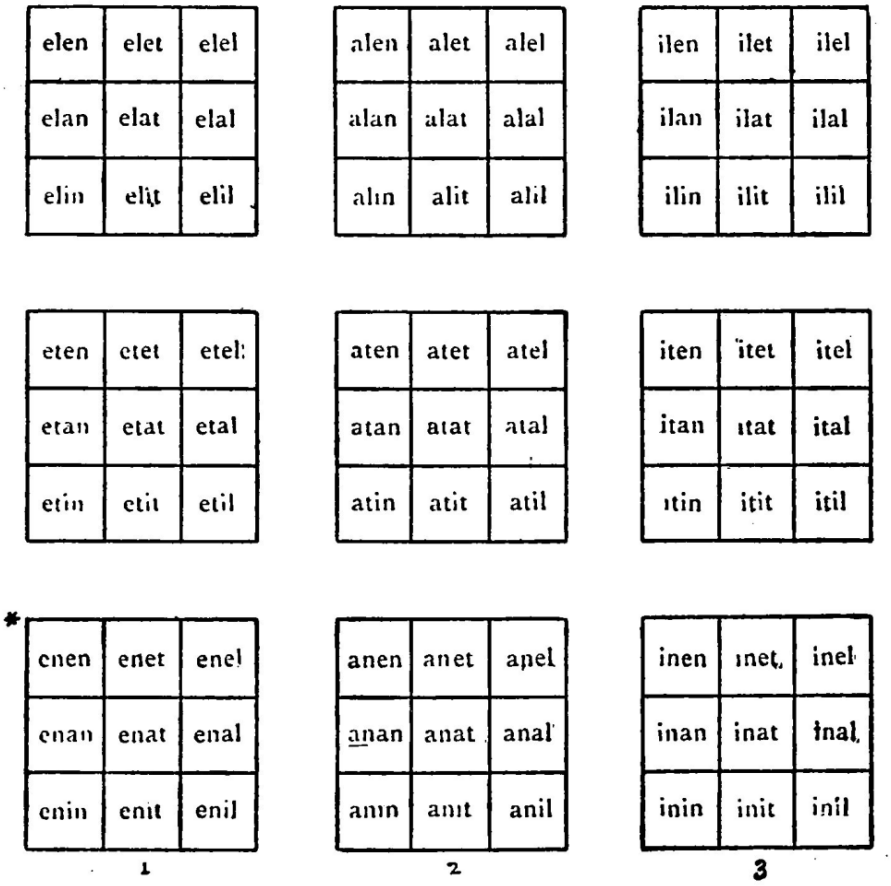


By using a more extended sequence of consonants and vowels a larger set of cubes can be named. [Pg 262]

To name a four-dimensional block of tesseracts it is simply necessary to prefix an “e,” an “a,” or an “i” to the cube names.

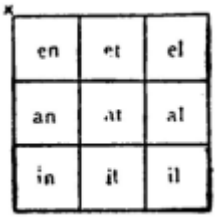


Thus the tesseract blocks schematically represented on page 165, fig. 101 are named as follows:—

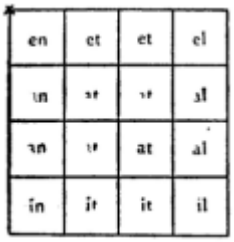


2. Derivation of Point, Line, Face, etc., Names.

The principle of derivation can be shown as follows: Taking the square of squares [Pg 263]



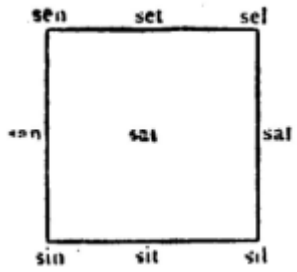
the number of squares in it can be enlarged and the whole kept the same size.



Compare fig. 79, p. 138, for instance, or the bottom layer of fig. 84.

Now use an initial “s” to denote the result of carrying this process on to a great extent, and we obtain the limit names, that is the point, line, area names for a square. “Sat” is the whole interior. The corners are “sen,” “sel,” “sin,” “sil,” while the lines are “san,” “sal,” “set,” “sit.”

I find that by the use of the initial “s” these names come to be practically entirely disconnected with the systematic names for the square from which they are derived. They are easy to learn, and when learned can be used readily with the axes running in any direction.



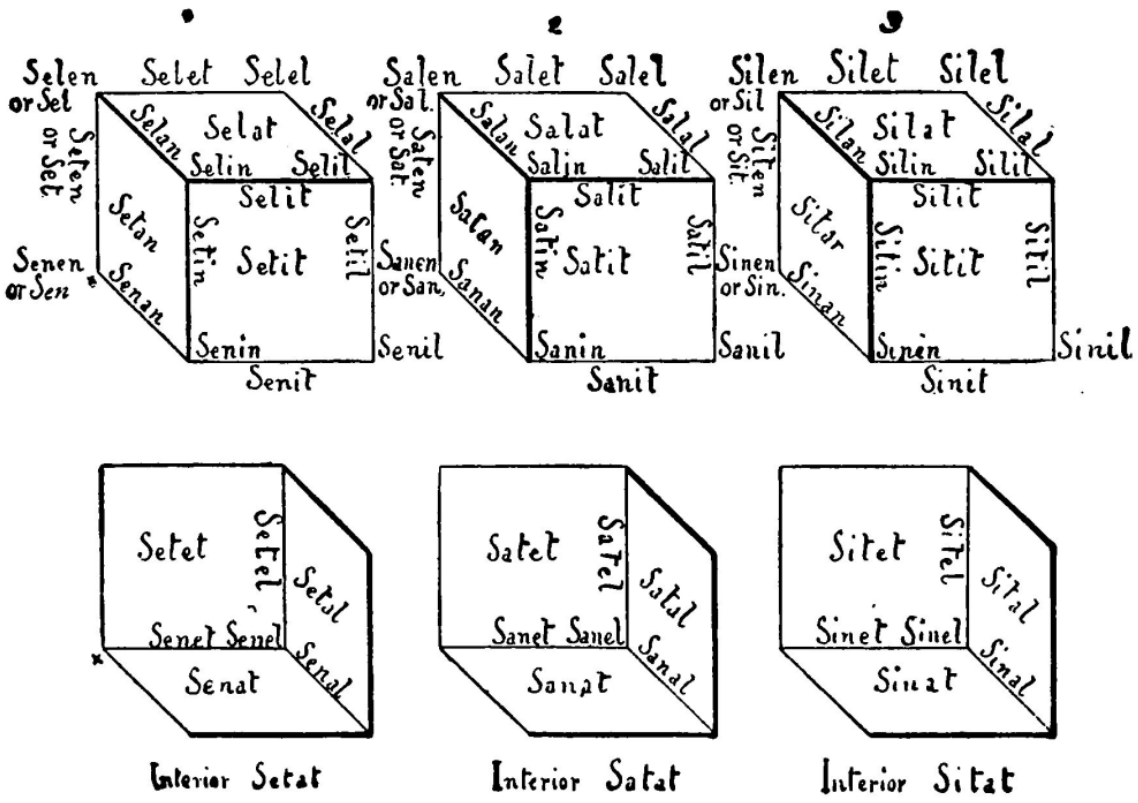
To derive the limit names for a four-dimensional rectangular figure, like the tesseract, is a simple extension of this process. These point, line, etc., names include those which apply to a cube, as will be evident on inspection of the first cube of the diagrams which follow.

All that is necessary is to place an “s” before each of the names given for a tesseract block. We then obtain apellatives which, like the colour names on page 174, fig. 103, apply to all the points, lines, faces, solids, and to the hyper-solid of the tesseract. These names have the advantage over the colour marks that each point, line, etc., has its own individual name. [Pg 264]

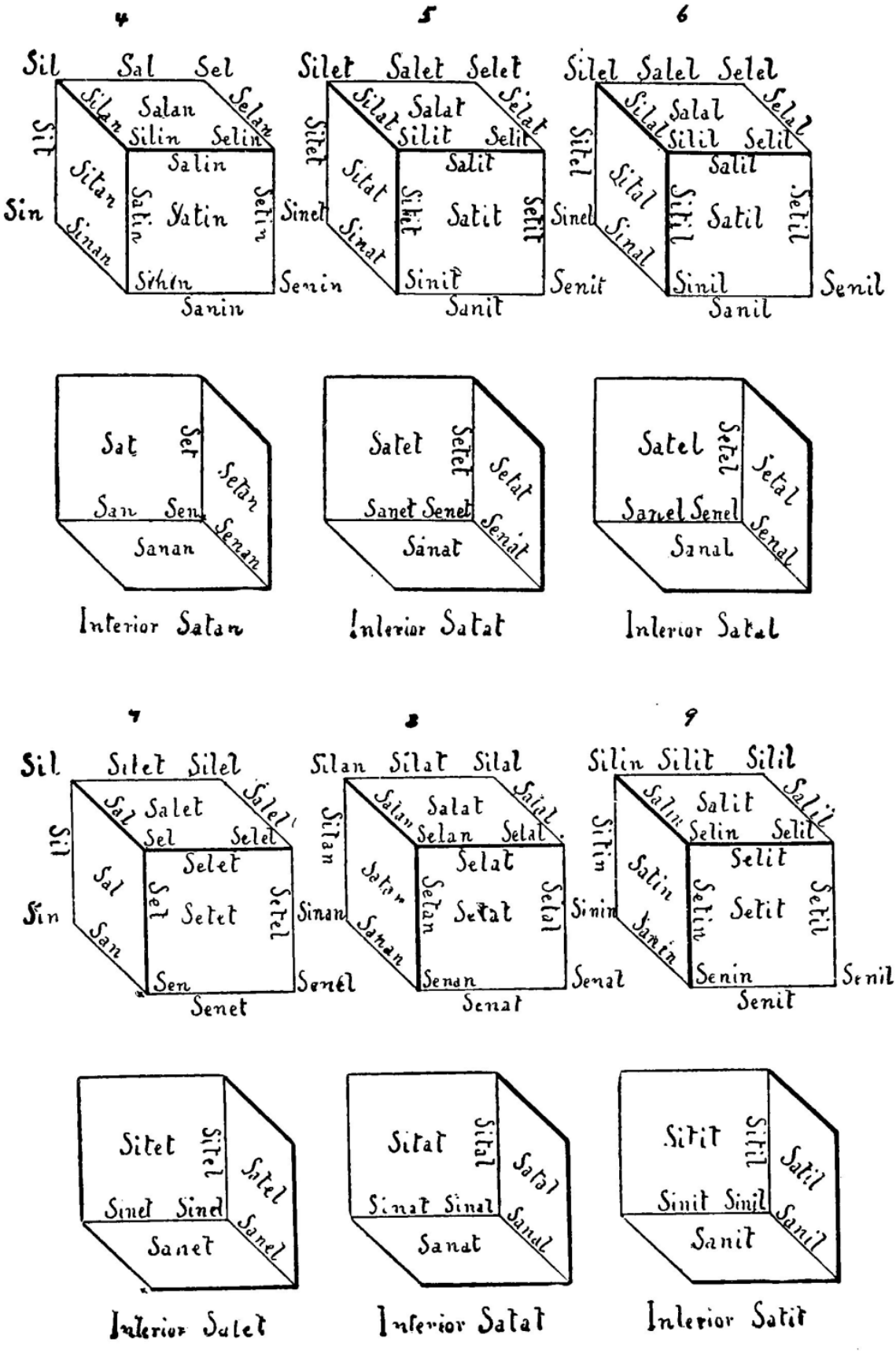
In the diagrams I give the names corresponding to the positions shown in the coloured plate or described on p. 174. By comparing cubes 1, 2, 3 with the first row of cubes in the coloured plate, the systematic names of each of the points, lines, faces, etc., can be determined. The asterisk shows the origin from which the names run.

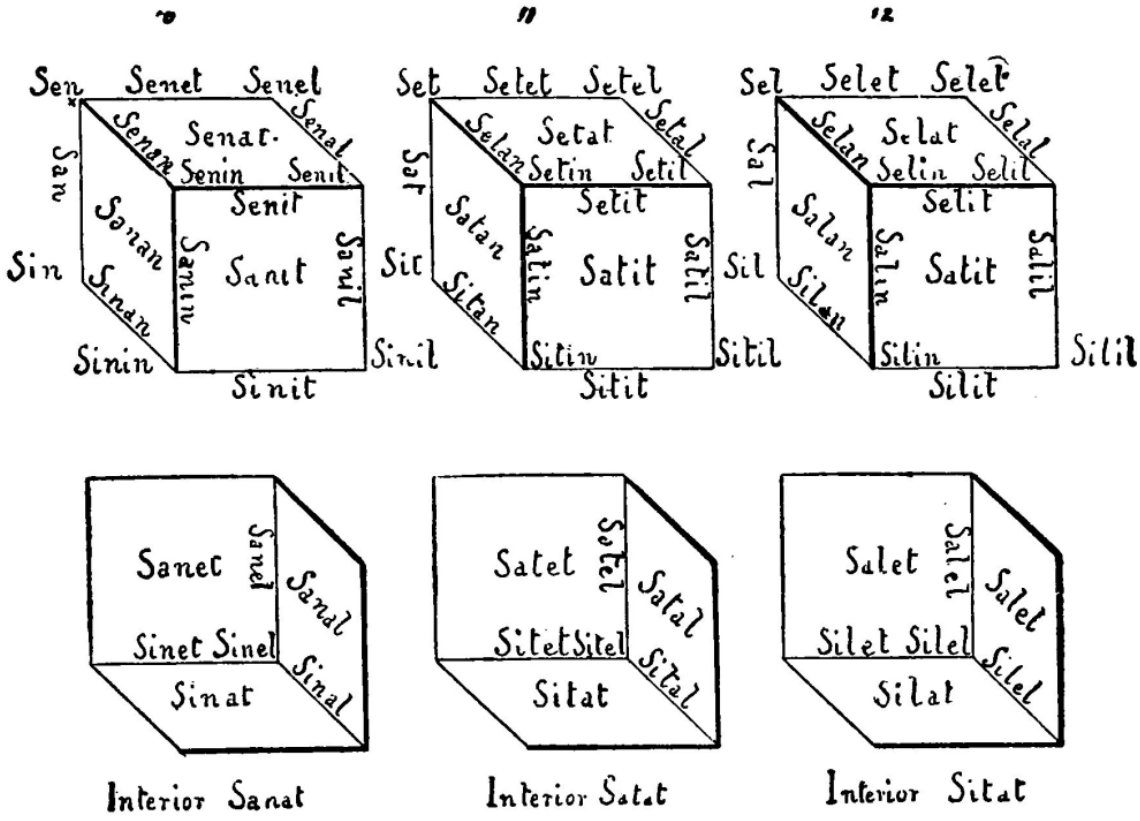
These point, line, face, etc., names should be used in connection with the corresponding colours. The names should call up coloured images of the parts named in their right connection.

Se ha descubierto que una cierta abreviatura añade viveza a la distinción de estos nombres. Si se elimina el “en” final dondequiera que aparezca, el sistema mejora. Por lo tanto, en lugar de “senen”, “seten”, “selen”, es preferible abreviar “sen”, “set”, “sel” y también usar “san”, “sin” para “sanen”, “sinen”. .”



[Pág. 265]


4
Sil Sal Sel
Salan Silan Selan
Silin Selin
Sil Salin
Sitan Satin Selin
Sin Satin
Sinan Sihin
Senin
Sanin
5
Silet Salet Selet
Salat Silat Selat
Silit Selit
Silet Salit
Sitat Satit Selit
Sinel Siket Satit
Sinat Sinit
Senit
Sanit
6
Silel Salel Selel
Salal Silal Selal
Silil Selil
Sitel Salil
Sital Satil Selil
Sinel Sitil Satil
Sinal Sinil
Senil
Sanil
Sat Set
Selan
San Sen
Senan
Sanan
Interior Satan
Satet Setet
Setat
Sanet Senet
Senat
Sanat
Interior Satat
Satel Setel
Setal
Sanel Senel
Senal
Sanal
Interior Satal
7
Sil Silet Silel
Salel Sal Salet
Sel Selet
Sil Selet
Sal Sel Setet Setel
Sin Sal
San Sen
Senel
Senet
8
Silan Silat Silal
Salat Salan
Selan Selal
Sitan Selat
Satan Setan Satal
Sinan Sanan
Senan
Senat
9
Silin Silit Silil
Salil Salin Salit
Selin Selil
Sitin Selit
Satin Setin Setil
Sinin Sanin
Senin
Senil
Senit
Sitet Sitel
Satel
Sinel Sinel
Sanet
Sanel
Interior Satet
Sitat Sital
Satal
Sinat Sinal
Sanat
Sanal
Interior Satat
Sitit Sitil
Satil
Sinit Sinil
Sanit
Sanil
Interior Satit



Ahora podemos nombrar cualquier sección. Tomemos , *por ejemplo,* la línea en el primer cubo de senin a senel, deberíamos llamar a la línea que va de senin a senel, senin senat senel, una línea de color amarillo claro con puntos nulos.

Aquí senat es el nombre de toda la línea excepto sus extremos. Usar “senat” de esta manera no significa que la línea sea el conjunto de senat, sino que lo que hay de ella es senat. Es parte de la región senat. Así también el triángulo, que tiene sus tres vértices en senin, senel, selen, se denomina así:

Zona: setat.
Lados: setan, senat, setet.
Vértices: senin, senel, sel.

La sección tetraédrica del teseracto se puede considerar como una serie de secciones planas en las secciones sucesivas del teseracto que se muestran en la fig. 114 , pág. 191. En b_0 la sección es el que está escrito arriba. En b_1 la sección se realiza mediante un [Pág. 267] plano que corta los tres bordes de sanen intermedio de sus longitudes y así quedará:

Zona: satat.
Lados: satanás, sanat, satet.
Vértices: sanan, sanet, sat.

Las secciones en b_2 , b_3 serán como la sección en b_1 pero más pequeñas.

Finalmente, en b_4 el plano de sección simplemente pasa por la esquina denominada sen.

Así, juntando estos tramos en su correcta relación, desde la cara setat, rodeada por las líneas y puntos antes mencionados, corre:

3 caras: satanás, sanat, satet
3 líneas: sanan, sanet, sat

y estos rostros y líneas van al punto del pecado. Así se nombra completamente el tetraedro.

La sección del octaedro del teseracto, que se puede rastrear en la fig. 72 , pág. 129 ampliando las líneas allí trazadas, se denomina:

Triángulo frontal selin, selat, selel, setal, senil, setit, selin con área setat.

Las secciones entre el triángulo delantero y trasero, de las cuales una se muestra en 1b, otra en 2b, se denominan así puntos y líneas, salan, salat, salet, satet, satel, satal, sanal, sanat, sanit, satit, satin. , satanás, salan.

El triángulo posterior que se encuentra en 3b al producir líneas es sil, sitet, sinel, sinat, sinin, sitan, sil.

El conjunto de secciones constituye el cuerpo sólido del octaedro satat de caras triangulares. El que va desde la recta selat hasta el punto sil, por ejemplo, se llama selin, selat, selel, salet, salat, salan, sil. Todo el interior es salat. [Pág. 268]

Se pueden recortar fácilmente formas de cartón que, al plegarlas, forman no sólo el tetraedro y el octaedro, sino también muestras de todas las secciones del teseracto tomadas a medida que pasa por las esquinas de nuestro espacio. Nombrar y visualizar con colores apropiados una serie de estas secciones es un ejercicio admirable para familiarizarse con el tema.

Extensión y Conexión con Números.

Por supuesto, ampliando la secuencia de letras es posible nombrar un campo más grande. Usando los nombres de límite se pueden nombrar las esquinas de cada cuadrado.

Así, “en sen”, “an sen”, etc., serán los nombres de los puntos más cercanos al origen en “en” y en “an”.

Un campo de puntos de los cuales cada uno es infinitamente pequeño viene dado por los nombres escritos a continuación.

Los cuadrados se muestran con líneas de puntos, los nombres indican los puntos. Estos puntos no son puntos matemáticos, sino áreas realmente diminutas.

En lugar de empezar con un conjunto de cuadrados y nombrarlos, podemos empezar con un conjunto de puntos.

Mediante una convención fácil de recordar podemos dar nombres a dicha región de puntos.

Dejemos que los nombres de los espacios con una “e” final agregada denoten los puntos matemáticos en la esquina de cada cuadrado más cercano al origen. tenemos entonces [Pág. 269]

para el conjunto de puntos matemáticos indicados. En realidad, este sistema es completamente independiente del sistema de áreas y está conectado con él únicamente para facilitar los procesos de memoria. La palabra "ene" se pronuncia como "eny", prestando suficiente atención a la vocal final para distinguirla de la palabra "en".

Ahora, conectando los números 0, 1, 2 con la secuencia e, a, i, y también con la secuencia n, t, l, tenemos un conjunto de puntos nombrados como números en un sistema de coordenadas. Así, “ene” es (0, 0), “ate” es (1, 1), “ite” es (2, 1). Para pasar al sistema de áreas la regla es que el nombre del cuadrado se forma a partir del nombre de su punto más cercano al origen eliminando la e final.

Usando una notación análoga al sistema decimal se puede nombrar un campo más grande de puntos. Queda por asignar una secuencia de letras a los números del 0 positivo al 9 positivo, y del 0 negativo al 9 negativo, para obtener un sistema que pueda usarse para denotar tanto el sistema de coordenadas habitual de mapeo como un sistema de cuadrados con nombre. . Todos los nombres que denotan los puntos terminan con e. Los que denotan cuadrados terminan en consonante.

Hay muchas consideraciones que deben tenerse en cuenta al ampliar las secuencias que se van a utilizar, como la singularidad del significado de las palabras formadas, la facilidad de pronunciación y la evitación de combinaciones incómodas.

Elimino la “s” por completo de la serie de consonantes y la “u” corta de la serie de vocales. Conviene tener a disposición letras poco significativas. Se puede hacer referencia a una consonante doble como “st”, por ejemplo, sin darle un significado local llamándola “ust”. Aumento el número de vocales considerando un sonido como “ra” como vocal, es decir, usando la letra “r” como formando una vocal compuesta. [Pág. 270]

La serie es la siguiente: -

Consonantes.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
positivo	norte	t	yo	pag	F	sh	k	ch	Nuevo Testamento	calle
negativo	z	d	th	b	v	metro	gramo	j	Dakota del Norte	sp

Vocales.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
positivo	mi	a	i	ee	ae	ai	Arkansas	real academia de bellas artes	Rhode Island	ree
negativo	ejem	oh	oh	yo	oe	yo	o	ro	río río	

Pronunciación. —e como en los hombres; a como en el hombre; yo como en en; ee como en el medio; ae como ay en mayo; ai como yo en el mío; ar como en el arte; er como oído en la tierra; o como en; oo como oo dentro de poco; io como en clarín; oe como oa en avena; iu se pronuncia como tejo.

Para nombrar un punto como (23, 41) se considera como (3, 1) a partir de (20, 40) y se llama “ifeete”. Es el punto inicial de los pies cuadrados del sistema de áreas.

La anterior ampliación de un lenguaje espacial se ha introducido simplemente para completar el texto. Como ya se ha dicho, nueve palabras y sus combinaciones, aplicadas

a unos pocos modelos simples, son suficientes para los propósitos de nuestra presente investigación.

Impreso por Hazell, Watson & Viney, Ld., Londres y Aylesbury.

FIN DEL PROYECTO GUTENBERG EBOOK LA CUARTA DIMENSIÓN

Las ediciones actualizadas reemplazarán a las anteriores; las ediciones antiguas cambiarán de nombre.

Crear las obras a partir de ediciones impresas no protegidas por la ley de derechos de autor de EE. UU. significa que nadie posee derechos de autor en los Estados Unidos sobre estas obras, por lo que la Fundación (¡y usted!) pueden copiarlas y distribuirlas en los Estados Unidos sin permiso y sin pagar regalías por derechos de autor. Se aplican reglas especiales, establecidas en los Términos generales de uso de esta licencia, a la copia y distribución de trabajos electrónicos del Proyecto Gutenberg™ para proteger el concepto y la marca registrada del PROJECT GUTENBERG™. Proyecto Gutenberg es una marca registrada y no se puede utilizar si cobra por un libro electrónico, excepto siguiendo los términos de la licencia de marca, incluido el pago de regalías por el uso de la marca comercial Proyecto Gutenberg. Si no cobra nada por las copias de este libro electrónico, cumplir con la licencia de marca es muy fácil. Puede utilizar este libro electrónico para casi cualquier propósito, como la creación de trabajos derivados, informes, actuaciones e investigaciones. Los libros electrónicos del Proyecto Gutenberg pueden modificarse, imprimirse y regalarse; usted puede hacer prácticamente CUALQUIER COSA en los Estados Unidos con libros electrónicos que no estén protegidos por las leyes de derechos de autor de EE. UU. La redistribución está sujeta a la licencia de marca, especialmente la redistribución comercial.

INICIO: LICENCIA COMPLETA

LA LICENCIA COMPLETA DEL PROYECTO GUTENBERG

LEA ESTO ANTES DE DISTRIBUIR O UTILIZAR ESTE TRABAJO

Para proteger la misión del Proyecto Gutenberg™ de promover la distribución gratuita de trabajos electrónicos, al usar o distribuir este trabajo (o cualquier otro trabajo asociado de alguna manera con la frase "Proyecto Gutenberg"), usted acepta cumplir con todos los términos del Licencia completa del Proyecto Gutenberg™ disponible con este archivo o en línea en www.gutenberg.org/license.

Sección 1. Condiciones generales de uso y redistribución de obras electrónicas del Proyecto Gutenberg™

1.A. Al leer o utilizar cualquier parte de este trabajo electrónico del Proyecto Gutenberg™, usted indica que ha leído, comprendido, aceptado y aceptado todos los términos de este acuerdo de licencia y propiedad intelectual (marca registrada/derechos de autor). Si no acepta cumplir con todos los términos de este acuerdo, debe dejar de usar y devolver o destruir todas las copias de los trabajos electrónicos del Proyecto Gutenberg™ que tenga en su poder. Si pagó una tarifa para obtener una copia o acceso a un trabajo electrónico del Proyecto Gutenberg™ y no acepta estar sujeto a los términos de este acuerdo, puede obtener un reembolso de la persona o entidad a quien le pagó la tarifa. según lo establecido en el apartado 1.E.8.

1.B. “Proyecto Gutenberg” es una marca registrada. Sólo puede ser utilizado o asociado de cualquier manera con un trabajo electrónico por personas que acepten estar sujetos a los términos de este acuerdo. Hay algunas cosas que puedes hacer con la mayoría de las obras electrónicas del Proyecto Gutenberg™ incluso sin cumplir con todos los términos

de este acuerdo. Véase el párrafo 1.C a continuación. Hay muchas cosas que puede hacer con las obras electrónicas del Proyecto Gutenberg™ si sigue los términos de este acuerdo y ayuda a preservar el acceso gratuito en el futuro a las obras electrónicas del Proyecto Gutenberg™. Véase el párrafo 1.E a continuación.

1.C. La Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg (“la Fundación” o PGLAF) posee los derechos de autor de la compilación de la colección de obras electrónicas del Proyecto Gutenberg™. Casi todas las obras individuales de la colección son de dominio público en los Estados Unidos. Si un trabajo individual no está protegido por la ley de derechos de autor en los Estados Unidos y usted se encuentra en los Estados Unidos, no reclamamos el derecho de impedirle copiar, distribuir, ejecutar, exhibir o crear trabajos derivados basados en el trabajo siempre que Se eliminan todas las referencias al Proyecto Gutenberg. Por supuesto, esperamos que apoye la misión del Proyecto Gutenberg™ de promover el acceso gratuito a obras electrónicas compartiendo libremente las obras del Proyecto Gutenberg™ de conformidad con los términos de este acuerdo para mantener el nombre del Proyecto Gutenberg™ asociado con la obra. Puede cumplir fácilmente con los términos de este acuerdo manteniendo este trabajo en el mismo formato con su licencia completa del Proyecto Gutenberg™ adjunta cuando lo comparta sin cargo con otros.

1.D. Las leyes de derechos de autor del lugar donde se encuentra también rigen lo que puede hacer con este trabajo. Las leyes de derechos de autor en la mayoría de los países están en constante estado de cambio. Si se encuentra fuera de los Estados Unidos, consulte las leyes de su país además de los términos de este acuerdo antes de descargar, copiar, mostrar, realizar, distribuir o crear trabajos derivados basados en este trabajo o cualquier otro trabajo del Proyecto Gutenberg™. La Fundación no hace ninguna declaración sobre el estado de los derechos de autor de ninguna obra en ningún país que no sea los Estados Unidos.

1.E. A menos que haya eliminado todas las referencias al Proyecto Gutenberg:

1.E.1. La siguiente oración, con enlaces activos u otro acceso inmediato a la Licencia completa del Proyecto Gutenberg™ debe aparecer de manera destacada siempre que cualquier copia de un trabajo del Proyecto Gutenberg™ (cualquier trabajo en el que aparezca la frase “Proyecto Gutenberg”, o con el cual el se accede a, muestra, realiza, visualiza, copia o distribuye la frase “Proyecto Gutenberg”:

> Este libro electrónico es para uso de cualquier persona en cualquier lugar de los Estados Unidos y en la mayor parte del resto del mundo, sin costo alguno y casi sin restricciones de ningún tipo. Puede copiarlo, regalarlo o reutilizarlo según los términos de la Licencia del Proyecto Gutenberg incluida con este libro electrónico o en línea en www.gutenberg.org . Si no se encuentra en los Estados Unidos, deberá verificar las leyes del país donde se encuentra antes de utilizar este libro electrónico.

1.E.2. Si un trabajo electrónico individual del Proyecto Gutenberg™ se deriva de textos no protegidos por la ley de derechos de autor de EE. UU. (no contiene un aviso que indique que se publicó con permiso del titular de los derechos de autor), el trabajo se puede copiar y distribuir a cualquier persona en los Estados Unidos. sin pagar ninguna tarifa o cargo. Si está redistribuyendo o brindando acceso a una obra con la frase "Proyecto Gutenberg" asociada o que aparece en la obra, debe cumplir con los requisitos de los párrafos 1.E.1 a 1.E.7 u obtener permiso para la uso de la obra y la marca registrada Proyecto Gutenberg™ según lo establecido en los párrafos 1.E.8 o 1.E.9.

1.E.3. Si un trabajo electrónico individual del Proyecto Gutenberg™ se publica con el permiso del titular de los derechos de autor, su uso y distribución deben cumplir con los párrafos 1.E.1 a 1.E.7 y cualquier término adicional impuesto por el titular de los derechos de autor. Se vincularán términos adicionales a la licencia del Proyecto

Gutenberg™ para todos los trabajos publicados con el permiso del titular de los derechos de autor que se encuentra al comienzo de este trabajo.

1.E.4. No desvincule, separe ni elimine los términos completos de la licencia del Proyecto Gutenberg™ de este trabajo, ni ningún archivo que contenga una parte de este trabajo o cualquier otro trabajo asociado con el Proyecto Gutenberg™.

1.E.5. No copie, muestre, ejecute, distribuya o redistribuya este trabajo electrónico, o cualquier parte de este trabajo electrónico, sin mostrar de manera destacada la oración establecida en el párrafo 1.E.1 con enlaces activos o acceso inmediato a los términos completos del Proyecto. Licencia Gutenberg™.

1.E.6. Puede convertir y distribuir este trabajo en cualquier formato binario, comprimido, marcado, no propietario o propietario, incluido cualquier formato de procesamiento de textos o hipertexto. Sin embargo, si proporciona acceso o distribuye copias de un trabajo del Proyecto Gutenberg™ en un formato que no sea “Plain Vanilla ASCII” u otro formato utilizado en la versión oficial publicada en el sitio web oficial del Proyecto Gutenberg™ (www.gutenberg.org), usted debe, sin costo, tarifa o gasto adicional para el usuario, proporcionar una copia, un medio para exportar una copia, o un medio para obtener una copia a pedido, del trabajo en su original “Plain Vanilla ASCII” u otra forma. . Cualquier formato alternativo debe incluir la licencia completa del Proyecto Gutenberg™ como se especifica en el párrafo 1.E.1.

1.E.7. No cobre una tarifa por acceder, ver, exhibir, ejecutar, copiar o distribuir cualquier obra del Proyecto Gutenberg™ a menos que cumpla con el párrafo 1.E.8 o 1.E.9.

1.E.8. Puede cobrar una tarifa razonable por las copias, el acceso o la distribución de los trabajos electrónicos del Proyecto Gutenberg™, siempre que:

- Usted paga una tarifa de regalías del 20% de las ganancias brutas que obtiene del uso de las obras del Proyecto Gutenberg™ calculadas utilizando el método que ya utiliza para calcular sus impuestos aplicables. La tarifa se debe al propietario de la marca registrada Proyecto Gutenberg™, pero él ha aceptado donar regalías según este párrafo a la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg. Los pagos de regalías deben pagarse dentro de los 60 días siguientes a cada fecha en la que prepare (o esté legalmente obligado a preparar) sus declaraciones de impuestos periódicas. Los pagos de regalías deben marcarse claramente como tales y enviarse a la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg a la dirección especificada en la Sección 4, “Información sobre donaciones a la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg”.
- Proporciona un reembolso completo de cualquier dinero pagado por un usuario que le notifique por escrito (o por correo electrónico) dentro de los 30 días posteriores a la recepción que no está de acuerdo con los términos de la licencia completa del Proyecto Gutenberg™. Debe exigir a dicho usuario que devuelva o destruya todas las copias de las obras que posee en un medio físico e interrumpa todo uso y acceso a otras copias de las obras del Proyecto Gutenberg™.
- Usted proporciona, de acuerdo con el párrafo 1.F.3, un reembolso completo de cualquier dinero pagado por una obra o una copia de reemplazo, si se descubre un defecto en la obra electrónica y se le informa dentro de los 90 días posteriores a la recepción de la obra. .
- Usted cumple con todos los demás términos de este acuerdo para la distribución gratuita de las obras del Proyecto Gutenberg™.

1.E.9. Si desea cobrar una tarifa o distribuir una obra electrónica o un grupo de obras del Proyecto Gutenberg™ en términos diferentes a los establecidos en este acuerdo, debe obtener permiso por escrito de la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg, el administrador del Proyecto Gutenberg. ™ marca registrada. Comuníquese con la Fundación como se establece en la Sección 3 a continuación.

1.F.

1.F.1. Los voluntarios y empleados del Proyecto Gutenberg dedican un esfuerzo considerable a identificar, realizar investigaciones sobre derechos de autor, transcribir y corregir trabajos no protegidos por la ley de derechos de autor de EE. UU. al crear la colección del Proyecto Gutenberg™. A pesar de estos esfuerzos, las obras electrónicas del Proyecto Gutenberg™ y el medio en el que pueden almacenarse pueden contener "defectos", como, entre otros, datos incompletos, inexactos o corruptos, errores de transcripción, derechos de autor u otra propiedad intelectual. infracción, un disco u otro medio defectuoso o dañado, un virus informático o códigos informáticos que dañen o no puedan ser leídos por su equipo.

1.F.2. GARANTÍA LIMITADA, EXENCIÓN DE RESPONSABILIDAD POR DAÑOS: excepto el “Derecho de reemplazo o reembolso” descrito en el párrafo 1.F.3, la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg, el propietario de la marca comercial del Proyecto Gutenberg™ y cualquier otra parte que distribuya el Proyecto Gutenberg. ™ trabajo electrónico bajo este acuerdo, renunciamos a toda responsabilidad hacia usted por daños, costos y gastos, incluidos los honorarios legales. USTED ACEPTA QUE NO TIENE RECURSOS POR NEGLIGENCIA, RESPONSABILIDAD ESTRICTA, INCUMPLIMIENTO DE GARANTÍA O INCUMPLIMIENTO DE CONTRATO EXCEPTO LOS ESTIPULADOS EN EL PÁRRAFO 1.F.3. USTED ACEPTA QUE LA FUNDACIÓN, EL PROPIETARIO DE LA MARCA REGISTRADA Y CUALQUIER DISTRIBUIDOR BAJO ESTE ACUERDO NO SERÁN RESPONSABLES ANTE USTED POR DAÑOS REALES, DIRECTOS, INDIRECTOS, CONSECUENCIALES, PUNITIVOS O INCIDENTALES AUNQUE USTED AVISE LA POSIBILIDAD DE DICHOS DAÑOS.

1.F.3. DERECHO LIMITADO DE REEMPLAZO O REEMBOLSO: si descubre un defecto en este trabajo electrónico dentro de los 90 días posteriores a su recepción, puede recibir un reembolso del dinero (si corresponde) que pagó por él enviando una explicación por escrito a la persona que recibió el trabajo de. Si recibió la obra en soporte físico, deberá devolver el soporte con su explicación por escrito. La persona o entidad que le proporcionó el trabajo defectuoso puede optar por proporcionarle una copia de reemplazo en lugar de un reembolso. Si recibió el trabajo electrónicamente, la persona o entidad que se lo proporcione puede optar por brindarle una segunda oportunidad de recibir el trabajo electrónicamente en lugar de un reembolso. Si la segunda copia también está defectuosa, podrá exigir un reembolso por escrito sin más oportunidades de solucionar el problema.

1.F.4. Excepto por el derecho limitado de reemplazo o reembolso establecido en el párrafo 1.F.3, este trabajo se le proporciona "TAL CUAL", SIN NINGUNA OTRA GARANTÍA DE NINGÚN TIPO, EXPRESA O IMPLÍCITA, INCLUYENDO PERO NO LIMITADO A GARANTÍAS DE COMERCIABILIDAD O IDONEIDAD PARA CUALQUIER FINALIDAD.

1.F.5. Algunos estados no permiten renuncias de ciertas garantías implícitas o la exclusión o limitación de ciertos tipos de daños. Si cualquier exención de responsabilidad o limitación establecida en este acuerdo viola la ley del estado aplicable a este acuerdo, el acuerdo se interpretará para hacer la máxima exención de responsabilidad o limitación permitida por la ley estatal aplicable. La invalidez o inaplicabilidad de cualquier disposición de este acuerdo no anulará las disposiciones restantes.

1.F.6. INDEMNIZACIÓN: Usted acepta indemnizar y eximir a la Fundación, al propietario de la marca registrada, a cualquier agente o empleado de la Fundación, a cualquier persona que proporcione copias de los trabajos electrónicos del Proyecto Gutenberg™ de conformidad con este acuerdo y a cualquier voluntario asociado con la producción, promoción y distribución de trabajos electrónicos del Proyecto Gutenberg™, exentos de toda responsabilidad, costos y gastos, incluidos los honorarios legales, que

surjan directa o indirectamente de cualquiera de los siguientes actos que usted haga o cause que ocurra: (a) distribución de este o cualquier trabajo del Proyecto Gutenberg™, (b) alteración, modificación o adiciones o eliminaciones de cualquier trabajo del Proyecto Gutenberg™, y (c) cualquier Defecto que usted cause.

Sección 2. Información sobre la Misión del Proyecto Gutenberg™

Project Gutenberg™ es sinónimo de distribución gratuita de obras electrónicas en formatos legibles por la más amplia variedad de computadoras, incluidas computadoras obsoletas, antiguas, de mediana edad y nuevas. Existe gracias a los esfuerzos de cientos de voluntarios y donaciones de personas de todos los ámbitos de la vida.

Los voluntarios y el apoyo financiero para brindarles la asistencia que necesitan son fundamentales para alcanzar los objetivos del Proyecto Gutenberg™ y garantizar que la colección del Proyecto Gutenberg™ permanezca disponible gratuitamente para las generaciones venideras. En 2001, se creó la Fundación Archivo Literario del Proyecto Gutenberg para proporcionar un futuro seguro y permanente al Proyecto Gutenberg™ y a las generaciones futuras. Para obtener más información sobre la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg y cómo sus esfuerzos y donaciones pueden ayudar, consulte las Secciones 3 y 4 y la página de información de la Fundación en www.gutenberg.org.

Sección 3. Información sobre la Fundación Archivo Literario Proyecto Gutenberg

La Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg es una corporación educativa sin fines de lucro 501(c)(3) organizada según las leyes del estado de Mississippi y con estatus de exención de impuestos por parte del Servicio de Impuestos Internos. El EIN o número de identificación fiscal federal de la Fundación es 64-6221541. Las contribuciones a la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg son deducibles de impuestos en la medida en que lo permitan las leyes federales de EE. UU. y las leyes de su estado.

La oficina comercial de la Fundación está ubicada en 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887. Los enlaces de contacto por correo electrónico y la información de contacto actualizada se pueden encontrar en el sitio web y la página oficial de la Fundación en www.gutenberg.org/contact

Sección 4. Información sobre Donaciones a la Fundación Archivo Literario Proyecto Gutenberg

El Proyecto Gutenberg™ depende y no puede sobrevivir sin un amplio apoyo público y donaciones para llevar a cabo su misión de aumentar el número de obras de dominio público y bajo licencia que pueden distribuirse gratuitamente en formato legible por máquina y accesible mediante la más amplia gama de equipos, incluidos equipos obsoletos. Muchas donaciones pequeñas ($1 a $5,000) son particularmente importantes para mantener el estado de exención de impuestos ante el IRS.

La Fundación se compromete a cumplir con las leyes que regulan las organizaciones benéficas y las donaciones benéficas en los 50 estados de los Estados Unidos. Los requisitos de cumplimiento no son uniformes y se necesita un esfuerzo considerable, mucho papeleo y muchas tarifas para cumplir y mantenerse al día con estos requisitos. No solicitamos donaciones en lugares donde no hayamos recibido confirmación escrita de cumplimiento. Para ENVIAR DONACIONES o determinar el estado de cumplimiento de cualquier estado en particular, visite www.gutenberg.org/donate .

Si bien no podemos solicitar ni solicitamos contribuciones de estados donde no hemos cumplido con los requisitos de solicitud, no conocemos ninguna prohibición contra la aceptación de donaciones no solicitadas de donantes en dichos estados que se acercan a nosotros con ofertas para donar.

Se aceptan con gratitud las donaciones internacionales, pero no podemos hacer ninguna declaración sobre el tratamiento fiscal de las donaciones recibidas desde fuera de los Estados Unidos. Las leyes estadounidenses por sí solas inundan a nuestro reducido personal.

Consulte las páginas web del Proyecto Gutenberg para conocer los métodos y direcciones de donación actuales. Se aceptan donaciones de otras formas, incluidos cheques, pagos en línea y donaciones con tarjeta de crédito. Para donar, visite: www.gutenberg.org/donate

Sección 5. Información general sobre las obras electrónicas del Proyecto Gutenberg™

El profesor Michael S. Hart fue el creador del concepto del Proyecto Gutenberg™ de una biblioteca de obras electrónicas que se podía compartir libremente con cualquiera. Durante cuarenta años, produjo y distribuyó libros electrónicos del Proyecto Gutenberg™ con sólo una red flexible de apoyo voluntario.

Los libros electrónicos del Proyecto Gutenberg™ a menudo se crean a partir de varias ediciones impresas, y se confirma que todas ellas no están protegidas por derechos de autor en los EE. UU. a menos que se incluya un aviso de derechos de autor. Por lo tanto, no necesariamente mantenemos los libros electrónicos de acuerdo con ninguna edición en papel en particular.

La mayoría de la gente comienza en nuestro sitio web, que tiene la función principal de búsqueda de PG: www.gutenberg.org .

Este sitio web incluye información sobre el Proyecto Gutenberg™, incluido cómo hacer donaciones a la Fundación del Archivo Literario del Proyecto Gutenberg, cómo ayudar a producir nuestros nuevos libros electrónicos y cómo suscribirse a nuestro boletín informativo por correo electrónico para recibir información sobre nuevos libros electrónicos.